UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA
ESCUELA DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA

UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL CON AYUDA DEL WINPLOT Y WX-MAXIMA

Presentado por

LUZ MARINA BOHÓRQUEZ MARTÍNEZ
CLAUDIA LILIANA YEPES VARGAS

Bogotá D.C. Colombia
2014

UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA
ESCUELA DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA

UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL CON AYUDA DEL WINPLOT Y WX-MAXIMA

Presentado por

LUZ MARINA BOHÓRQUEZ MARTÍNEZ
CLAUDIA LILIANA YEPES VARGAS

DIRECTOR

LUIS EDUARDO PÉREZ LAVERDE

Bogotá D.C., Colombia
2014

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

Bogotá D.C. 2014

TABLA DE CONTENIDO

Resumen del Proyecto

La presente investigación muestra el planteamiento de una estrategia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, para la enseñanza del concepto de Espacio vectorial, que hace parte de los contenidos de la asignatura álgebra lineal, ofrecida por el departamento de Ciencias Básicas de la universidad ECCI de Colombia. La investigación fue desarrollada con estudiantes de primer semestre de ingeniería de la institución mencionada anteriormente, y para su ejecución se elaboraron talleres con la utilización de Software especializado y pertinente como Winplot y wx-Máxima.

Palabras Clave: Algebra Lineal, Espacio Vectorial, Wintplot, wx-Máxima, Estrategia Didáctica.

Abstract

This research shows the approach of a teaching strategy based on the Theory of Didactic Situations Guy Brousseau, for teaching the concept of vector space, which is part of the contents of the linear algebra course offered by the Department of Basic Sciences the ECCI Colombia university. The research was conducted with freshmen engineering of the institution aforesaid, and to run workshops developed with the use of specialized software and relevant as Winplot and wx-Maxima.

Keywords: Linear Algebra, Vector Spaces, Wintplot, wx-Máxima, Teaching Strategy.

Introducción

La investigación plantea una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de Espacio Vectorial a estudiantes de primer semestre de ingeniería en la universidad ECCI de Colombia, para su ejecución se conforman dos grupos de estudiantes, el primer grupo es llamado grupo control, y el segundo grupo el llamado grupo experimental en el cual será aplicada la estrategia didáctica.

En la enseñanza de Algebra lineal una de las dificultades que poseen los estudiantes es la comprensión de conceptos básicos entre ellos el de Espacio Vectorial, la investigación en el primer capítulo presenta una hipótesis por medio de la cual se quiere ver si es posible que los estudiantes asimilen el concepto de Espacio Vectorial mediante la aplicación de una Estrategia 0044idáctica en la cual se tendrá ayuda de herramienta didácticas como son Winplot y wxMáxima. De igual forma se presentan objetivos a cumplir a través del desarrollo y aplicación de la estrategia, también se mencionarán algunos de los aportes realizados por diversos investigadores en el tema de enseñanza del algebra lineal, su didáctica, los aportes y la ayuda brindada por algunos programas matemáticos.

El marco teórico de la presente investigación está planteado por cuatro referentes como son: el referente teórico acerca del algebra lineal y el concepto de Espacio Vectorial, el referente tecnológico que se ha venido trabajando en la enseñanza de la matemáticas, el referente

Didáctico en el cual se basa esta investigación y el referente estadístico utilizado para el análisis y las conclusiones encontradas a través de los datos

En el segundo capítulo se esbozan cuatro referentes teóricos como son: El referente teórico acerca del algebra lineal y el concepto de Espacio Vectorial, el referente tecnológico que se ha venido trabajando en la enseñanza de la matemáticas, el referente didáctico por medio de los fundamentos de la Teoría de Situaciones Didácticas planteadas por Guy Brousseau, este enfoque permite que el estudiante comprenda y resuelva situaciones con los conocimientos previos básicos, además que por medio de estas situaciones logre asimilar un nuevo concepto en el caso de la investigación el concepto de espacio vectorial, por último el referente estadístico utilizado en el análisis de los datos.

En el tercer capítulo se presenta el desarrollo del proceso de investigación es decir se muestra como es realizada cada una de las Situaciones Didácticas, comentando el proceso llevado a cabo con los estudiantes sus aportes e inquietudes y como el trabajo con programas matemáticos como Winplot y wxMáxima forman parte del continuo aprendizaje.

En un cuarto capítulo se muestra todo el proceso llevado en la investigación para la recolección y análisis de los datos, además se van presentado los resultados obtenidos al final de los procesos su importancia y relevancia para la investigación.

Por último se presentan las conclusiones de la investigación, el aporte que esta genera en la enseñanza del concepto de espacio vectorial, cuales son las fortalezas en el planteamiento y desarrollo de este tipo de estrategia y cuáles son las inquietudes que genero la investigación y como pueden ser resueltas en futuras investigaciones.

CAPITULO 1

Planteamiento del Problema

Uno de los primeros cursos a los que se enfrenta un estudiante de ingeniería cuando ingresa a la educación superior es el álgebra lineal, en ella se abordan conceptos de difícil asimilación por parte del estudiante porque les es complicado comprender la estructura matemática que poseen, uno de estos conceptos es el de Espacio Vectorial.

El concepto de espacio vectorial es básico para la comprensión de conceptos en asignaturas como Calculo Vectorial, Ecuaciones Diferenciales, Física entre otras, en dichas asignaturas es necesario que el estudiante posea claridad en este concepto previo, por tal razón se debe buscar estrategias que permitan al estudiante su asimilación y de esta forma no llegar con vacios conceptuales a la iniciación de cursos posteriores.

La mayor parte de los docentes trabajan en la asignatura de algebra lineal temas como sistemas de ecuaciones, matrices, determinantes entre otros, dejando de lado la definición de Espacio Vectorial, ya sea por la falta de tiempo, falta de herramientas adecuadas para su enseñanza, o cualquier otro inconveniente, este tema no se realiza o si se lleva a cabo no se desarrolla con la relevancia que posee, es por eso que para los estudiantes es difícil el representar un vector aparte de la forma geométrica que ya conocen.

Teniendo en cuenta los constantes desafíos que posee una docente en la enseñanza del concepto de espacio vectorial la presente investigación plantea una estrategia didáctica, basada en la teoría de situaciones didácticas planteadas por Guy Brousseau (1986) y apoyada en herramientas computacionales por medio de la cual se busca que el estudiante se apropie de dicho concepto.

Pregunta Problema

¿Qué Asociación existe entre el aprendizaje del concepto de Espacio Vectorial y el planteamiento de una estrategia didáctica con el uso de la herramienta computacional como wxMáxima, Winplot en estudiantes de primer semestre de ingeniería en la Universidad ECCI de Colombia?

Justificación

El hombre está en constante desarrollo intelectual, aprovechando los avances de las nuevas tecnologías para su servicio, algunas de las tecnologías innovadoras son el software matemático que ofrece numerosas ventajas didácticas educativas de las cuales nos podemos valer en las aulas de educación superior para mejorar los procesos de enseñanza del álgebra lineal.

Estos nuevos avances tecnológicos crean curiosidad en la mayor parte de los estudiantes de la actualidad es por eso que nuestro deber como docentes es crear estrategias didácticas que se apoyen en estos avances, el propósito de esta investigación pretende observar el impacto de las nuevas tecnologías ante el aprendizaje del concepto de espacio vectorial, además el ver como la aplicación de diversos programas puede ayudar en la comprensión del mismo.

El presente trabajo ofrece una alternativa didáctica al docente que pueda ser utilizar en el desarrollo de sus clases de algebra lineal, como es el uso de las nuevas tecnologías que hoy en día están al alcance de la mayor parte de las instituciones educativas, es decir la utilización de programas como son el wxMáxima, y el Winplot, para el aprendizaje del algebra lineal y de manera más rigurosa en el tema de Espacios Vectoriales.

Estado del Arte

Debido las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de algebra lineal, y en particular del concepto de espacio vectorial en algunos programas académicos universitarios, se han creado diversos grupos de investigación dedicados al estudio de su enseñanza.

A continuación se presentarán algunas de las investigaciones más relevantes acerca del estudio de la didáctica del algebra lineal, dichas investigaciones se mostrarán en orden cronológico.

Miguel Platan (1999) en la Universidad Autónoma de nuevo León (México), realizo una investigación acerca de cómo el desarrollo de la tecnología impacta el proceso de enseñanza aprendizaje del algebra lineal, para ello utilizo como herramienta didáctica el Software matemático Derive, por medio del cual se apoyo para la solución de diversos procesos matemáticos y la grafica de los mismo. Concluyó de este estudio que el uso de las tecnologías como recursos didácticos favorecen la enseñanza aprendizaje, además que se debe tener en cuenta que uno de los objetivos básicos de la educación es el de preparar a los jóvenes en una sociedad tecnológicamente avanzada.

Pedro Ortega (2002) en la Universidad autónoma de Madrid (España), analizo las características educativas de una estrategia didáctica que incorpora el Derive en el proceso de enseñanza aprendizaje del algebra lineal en estudiantes de primer semestre, para ello plantea cinco pautas importantes en este análisis; El Derive ofrece un sistema de notación intermedia en el proceso enseñanza aprendizaje del álgebra lineal, la herramienta logra favorecer las relaciones sociales de los alumnos, el protagonismo del alumno durante el proceso es óptimo, se logra un reconocimiento por parte del alumno de los conceptos básicos de álgebra lineal, el Derive facilita el desarrollo de diversos cálculos rutinarios. Ortega no solo logra demostrar cada uno de las pautas planteadas sino además encuentra diversas características en su análisis como son: El interés demostrado por parte de los alumnos en esta nueva didáctica, la capacidad demostrada en el desarrollo de los test por parte de los estudiantes para diferenciar los contenidos esenciales de los no esenciales en un programa de álgebra lineal, el aprendizaje activo y el alto nivel de autonomía mostrado por los estudiantes, entre otras muchas conclusiones logradas por dicho análisis.

Maracci (2005), se enfocó en las dificultades y errores de los estudiantes al resolver problemas de algebra lineal; además analiza las dificultades que presentan los estudiantes en el tema de espacios vectoriales.

Nereida J. Hernández (2007), Universidad de los Andes República Bolivariana de Venezuela, en el trabajo las situaciones didácticas de Brousseau para la enseñanza de vectores en tercera dimensión con aplicación de un software matemático, la metodología es de tipo descriptiva.

Julio Mosquera y Audi Salcedo (2008), en la Universidad Nacional Abierta (Venezuela), realizaron una investigación acerca de la didáctica del algebra lineal y la probabilidad, la primera parte que es la interesa para el desarrollo de esta investigación se divide en tres unidades y siete lecciones por medio de las cuales los autores buscan estudiar aproximaciones teóricas en la didáctica del álgebra lineal analizando el uso de Tic´s en su enseñanza aprendizaje y de esta manera desarrollar unidades didácticas en la misma.

Marcela Parragues (2009), Instituto Politécnico Nacional (México), Realiza una investigación de nivel doctoral por medio de la cual estudia la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial en los estudiantes de algebra lineal, para el desarrollo de su investigación se basa en la Teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) presentada por Ed Dubinsky.

En dicha investigación inicia hablando acerca de cómo el fracaso de gran parte de los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos básicos de algebra lineal ha creado grupos de investigación en países como Canadá, Estados Unidos, Francia entre otros, por eso presenta una propuesta para dar a conocer el concepto de Espacio Vectorial generando diversas actividades en las cuales busca descomponer genéticamente el concepto del mismo, para que después pueda ser construido por los mismos estudiantes, esto lo realiza mediante un ciclo formado por tres componentes; un análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de los datos.

Yani Betancourt González (2009), centro de investigación y estudios avanzados del instituto politécnico nacional (México Distrito Federal), realiza un trabajo de investigación acerca de la creación de un ambiente computacional para apoyarla enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales a nivel de superior en estudiantes de licenciatura e ingeniería. El propósito de la investigación a futuro es centralizar los problemas que se viene presentado en la enseñanza del algebra lineal a través de un medio computacional.

Edith Montoya, Teresa Guzmán (2012), Universidad Autónoma de Querétaro (Mexico), desarrollaron un trabajo en el cual se apoyaban en las herramientas Web para la enseñanza de Algebra Lineal, su propuesta plantea como el docente apoyándose en herramientas como Google Docs, Wikis, Websquest, sus diseños y las actividades allí planteadas pueden generar un aprendizaje significativo en los estudiantes del instituto perteneciente a la ingeniería de dicha universidad, como resultado de su trabajo encontró que la mayoría de los Docentes han sido formados de forma tradicional lo cual dificulta el aprovechamiento de estas nuevas tecnologías, razón por la cual es necesario capacitar tanto a docentes como estudiantes en el uso de las mismas para así poder cambiar el método de enseñanza-aprendizaje.

Germán Rosales (2012), Universidad Nacional de Colombia (Manizales), Desarrollo una investigación por medio de la cual diseño e implemento talleres didácticos o módulos en los cuales se trabajaban conceptos básicos del álgebra lineal como son el algebra Matricial y los sistemas de ecuaciones lineales, dichos talleres fueron apoyados en el Software matemático Scilab y desarrollados por estudiantes de primer semestre de ciencias e ingeniería de dicha universidad, una de las conclusiones más relevantes obtenida mediante el análisis de los datos encontrados durante su investigación es que el programa Scilab aplicado en la enseñanza del algebra lineal permite mejorar el rendimiento académico de los estudiantes.

Rocío Elizabeth Figueroa (2013), universidad Católica del Perú. Efectúa una didáctica enfocada en la teoría de las situaciones didácticas (TSD) de Brousseau, para solucionar problemas de sistemas de ecuaciones lineales en donde por medio de actividades los estudiantes realicen las etapas de las situaciones didácticas (Acción, Formulación, y Validación), el proceso metodológico que se llevó a cabo es utilizando la ingeniería didáctica.

Debido las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de algebra lineal, y en particular del concepto de espacio vectorial en algunos programas académicos universitarios, se han creado diversos grupos de investigación dedicados al estudio de su enseñanza.

Hipótesis

Existe una Asociación entre el aprendizaje del concepto de Espacio Vectorial y el planteamiento de una estrategia didáctica con el uso de herramientas computacionales como wx-Máxima, Wintplot en estudiantes de primer semestre de ingeniería de la Universidad ECCI de Colombia.

Objetivos

General

Presentar una estrategia didáctica basada en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau para la asimilación del concepto de espacio vectorial en los estudiantes de primer semestre de ingeniería en la universidad ECCI de Colombia con ayuda de Sofware especializado como son el wx-Máxima, y winplot.

Específicos

1. Diseñar una prueba de entrada que permita conocer los prerrequisitos de algebra lineal que poseen los estudiantes al ingresar al primer semestre de la carrera de ingeniería.

2. Ejecutar talleres que involucren conceptos de algebra lineal por medio de la implementación de los programas de Winplot y wxMáxima para la asimilación del concepto de espacio vectorial en los estudiantes.

3. Analizar los datos obtenidos en cada una de las fases de la estrategia didáctica mediante pruebas estadísticas.

Metodología

El desarrollo de la investigación está basado en la teoría de situaciones didácticas planteada por Guy Brousseau (1986) dichas situaciones didáctica conlleva talleres y pautas por medio de las cuales se busca acercamiento al concepto de espacio vectorial y al final la asimilación del mismo por parte del estudiante, es de nivel exploratoria, con una naturaleza cuantitativa.

La investigación se desarrolla con estudiantes de primer semestre de ingeniería de la universidad ECCI de Colombia, para la aplicación de esta se escogieron dos grupos de estudiantes de primer semestre en la jornada diurna, uno como grupo control y el otro grupo experimental en el cual se aplica la estrategia didáctica.

En el transcurso de la investigación se tienen en cuenta algunos aspectos referentes a la población estudiantil como son:

- Algunos de los estudiantes de la muestra pueden ser repitentes de la asignatura.
- Algunos estudiantes de la muestra también trabajan.
- Algunos estudiantes aun cuando la materia no es obligatoria se inscribieron en la misma.
- Existe deserción académica la cual se verá reflejada en el análisis de los datos.

La investigación es desarrollada con los dos grupos mencionados anteriormente durante el segundo semestre del 2013, se realiza un instrumento diagnóstico con los estudiantes de los grupos, los dos grupos son orientados por la misma docente que se encuentra laborando en la

ECCI y forma parte de la investigación. En el grupo experimental se realizara la aplicación de las guías y los talleres en los cuales se llevara a cabo un proceso de enseñanza aprendizaje con la ayuda de programas matemáticos como son el Winplot y wx-Máxima.

Cronograma

Tabla 1. Actividades programadas en la investigación para el 2013

Actividad		F	M	A	M	J	JL	A	S	
Identificación del problema		●	●							
Recopilación y revisión preliminar de la información			●	●	●	●	●			
Formulación del problema, planteamiento			●	●						
Justificación , hipótesis					●	●				
Objetivos, Metodología						●	●	●	●	
Revisión bibliográfica, estado del arte y marco teórico					●	●	●	●	●	

Tabla 2. Actividades programadas en la investigación para el 2013

ACTIVIDAD		M	A	M	J	JL	A	S	O	N
Construcción de Tutoriales		●	●	●						
Aplicación prueba de entrada							●			
Introducción a los programas Winplot y wx-Máxima								●		
Construcción Estado del Arte y Marco Teórico		●	●	●	●	●	●	●	●	●
Diseño y construcción de Talleres		●	●	●	●	●				

Aplicación de Talleres diseñados							●	●	●	
Asistencia evento académico como ponente									●	
Prueba de salida										●

Tabla 3. Actividades programadas en la investigación para el año 2014

ACTIVIDAD	F	M	A	M
Análisis de resultados	●	●		
Conclusiones		●		
Elaboración y preparación de informe final	●	●		
Sustentación Comité			●	
Sustentación Final				●

CAPITULO 2

Marco Teórico

El marco teórico de la presente investigación está planteado por cuatro referentes; el referente teórico acerca del algebra lineal y el concepto de Espacio Vectorial, el referente tecnológico que se ha venido trabajando en la enseñanza de la matemáticas, el referente Didáctico en el cual se basa esta investigación y el referente estadístico utilizado para el análisis y las conclusiones encontradas a través de los datos.

Referente Teórico

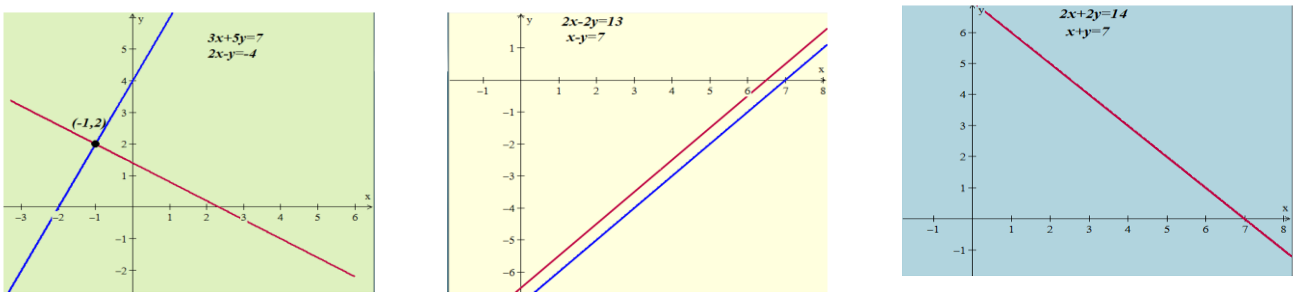
Definiciones de conceptos del Álgebra Lineal

Sistema de ecuaciones lineales y matrices

Un sistema de ecuaciones lineales es un grupo de dos o más ecuaciones que comprenden dos o más variables de primer grado.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n} \end{array}$$

Sus soluciones se clasifican en tres tipos: Sistema con una solución única (para el sistema existe una única solución), sistema con infinitas soluciones (en este sistema las ecuaciones son dependientes), sistema sin solución (no tienen ningún punto en común luego no existe solución).



SISTEMA CON SOLUCIÓN ÚNICA

SISTEMA SIN SOLUCIÓN

SISTEMA CON INFINITAS SOLUCIONES

Ilustración 1 Solución Grafica de los sistemas de ecuaciones lineales.

Matrices.

Una matriz de orden $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ es un arreglo rectangular de elementos a_{ij} conformado en $\boldsymbol{m}$ líneas horizontales llamadas filas y $\boldsymbol{n}$ líneas verticales llamadas columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En el estudio del algebra lineal para la solución de diversos sistemas de ecuaciones debemos operar y conocer diversos tipos de matrices como son: La matriz inversa, la matriz identidad, la matriz triangular superior, la matriz triangular inferior, la matriz simétrica, la matriz antisimétrica y la matriz adjunta entre otras.

Algunos de los métodos más conocidos para la solución de un sistema de ecuaciones por medio de matrices son: El método de eliminación de Gauss- Jordan, el método de matriz inversa y la regla de Crammer.

Vectores.

Vector: En algebra lineal se define un vector geométrico como el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina una representación del vector, y un vector algebraico en un plano $\mathbb{R}^2$ xy a un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b Se denominan elementos o componentes del vector $\vec{v}$, de igual forma un vector algebraico en el espacio $\mathbb{R}^3$ es una tripla de números reales (a, b, c).

Algunas de las operaciones que se pueden realizar con vectores son: la suma, el producto escalar, entre otras.

Espacio Vectorial.

Sea V un conjunto sobre el cual se definen dos operaciones, una operación interna llamada suma y una externa llamada multiplicación por un escalar. Si u y v están en V, la suma de u y v se denota mediante $u + v$, y si c es un escalar perteneciente a un campo K, el múltiplo escalar de u por c se denota mediante $c\,u$. Si los siguientes axiomas se cumplen para todos

$u, v\ y\ w$ en V y para todos los escalares $c\ y\ d$ en K, entonces V se llama espacio vectorial y sus elementos se llaman *vectores*.

Axiomas de los Espacios Vectoriales.

1. Si $u \epsilon\ V$ y $v \epsilon\ V$, entonces $u + v \epsilon\ V$. (cerrado bajo la suma)
2. Paro todo $u, v, w\ \epsilon\ V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Ley asociativa de la suma)
3. Existe un vector $0 \epsilon\ V$ tal que para todo $u \epsilon\ V$, $u + 0 = u\ \epsilon\ V$
4. Si $u \epsilon\ V$, existe un vector $-u \epsilon\ V$ tal que $u + (-u) = 0$. y $(-u)$ se llama inverso aditivo de u.
5. Si u y v están en V, entonces $u + v = v + u$ (Ley conmutativa de la suma)
6. Si $u \in V\ y\ \alpha$ es un escalar, entonces $\alpha u \in V$ (cerradura bajo la multiplicación por un escalar).
7. Si u y v están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$. (Ley distributiva).
8. $u \in V$ y $\alpha\ y\ \beta$ son escalares, entonces $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$. (Ley asociativa de la multiplicación por escalares)
9. Para cada vector $u \in V,\ 1u = u$

Referente Tecnológico

A partir de los años setenta, los distritos escolares de los Estados Unidos empezaron a utilizar regularmente los ordenadores para almacenar datos sobre los alumnos y el personal docente. Con la llegada de los ordenadores personales de alta velocidad, en la década de los noventa, los ordenadores se convirtieron en parte del mobiliario normal de las oficinas escolares.

Los educadores americanos, Dwyer y Critchfield (1978) y Luehrmann y Peckham (1984), no podían utilizar un ordenador correctamente sin saber programarlo. Esto hizo que la programación y alfabetización se convirtieran en sinónimos ya que en una época lo programas de aplicación casi no existían. Con la rápida expansión de los programas la formación en informática evolucionó a diferentes niveles, desde la alfabetización informática elemental hasta el uso de diversos paquetes para programar. Todos estos niveles se pueden agrupar bajo el nombre de educación «profesional» de TIC. (Tecnología de la Información y de la Comunicación).

Trabajos teóricos como «The Process of Conceptualization», de Brown y Lewis (1968), y Mindstorms, de Seymour Papert (1980), todavía influyen en el pensamiento actual sobre las TIC en la enseñanza, a pesar de la incapacidad de la comunidad investigadora para demostrar la ganancia cognitiva.

Estos últimos años ha sido fundamental el desarrollo de las nuevas tecnologías en los diferentes sectores de la humanidad. Quizás la entidad que más ha tardado en incorporar la totalidad de estas tecnologías ha sido el sector educativo. No olvidemos que la tiza, la pizarra y los textos fueron implementos indiscutibles y tecnológicos más utilizados en el aula desde épocas remotas.

Hace veinte años las TIC, auguraron que este sistema de tecnología sería la solución para la enseñanza y el aprendizaje en las diferentes entidades educativas. Las tecnologías facilita la explicación de muchos temas abstractos como el caso del algebra lineal donde los contenidos son complejos y tediosos, pero se establecería una nueva estrategia didáctica en cuanto a los avances tecnológicos y se dejaría de lado las clases tradicionales.

La utilización de la calculadora gráfica (CG) TI-92, se incorpora como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas más que todo en el campo del algebra lineal, el cual propicia a las aplicaciones importantes en la modelización de situaciones el mundo real tal como platean Harel (1998), Brunner, Coshey y Sheehan (1998) y Dorier entre otros.

La escogencia del álgebra lineal se debe a un documento diseñado por la consejería de educación de la junta Andalucía (1992) por el cual establece que en la educación secundaria obligatoria, se debe contemplar la resolución de ecuaciones lineales y de dos sistemas de ecuaciones mediante métodos diversos.

Igualmente, se deben tener en cuenta las aplicaciones de los métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos y en la vida actual, dentro de la diversidad de situaciones que se resuelven con procedimientos algebraicos cuya formulación involucra el hallazgo de uno o dos datos.

wxMáxima es un programa cuyo objeto es la realización de cálculos matemáticos simbólicos, capaz de manipular expresiones algebraicas. Los orígenes de wx-Máxima inician en el año de 1967 en el MITAI LAB (laboratorio de inteligencia artificial del instituto tecnológico de MASSACHUSSETS).

En el algebra lineal y más preciso en la definición de espacio vectorial el programa wxMáxima posee diversos comandos que facilitad el desarrollo de cálculos tediosos y la comprensión de los mismos.

Winplot es un software matemático gratis que dio su versión inicial en 1985, al ser desarrollado por Rick Rarris dentro de un grupo de distintos programas el cual llevaba el nombre de “Peanut Software”.

Referente Didáctico

Esta investigación pretende dar una estrategia didáctica por medio de la cual sea posible mejorar la comprensión del concepto espacio vectorial de álgebra lineal con la ayuda de las TIC.

Ya que se habla de una estrategia didáctica se debe definir cada uno de los conceptos que implica este término, se empezará hablando sobre Didáctica de la matemática, luego se mencionará el enfoque base para el desarrollo de la investigación.

La didáctica de la matemática puede ser definida como la ciencia que se ocupa de estudiar el proceso por medio del cual se desarrolla la enseñanza de la matemática, creando diversas circunstancias en las cuales se logre el aprendizaje.

Algunas definiciones de didáctica de la matemática son según Brousseau (1986)

"La didáctica de la matemática estudia las actividades didácticas, es decir las actividades que tienen como objeto la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tienen de especifico de la matemática, tratan los comportamientos colectivos de los alumnos, pero también los tipos de situaciones empleadas para enseñarles y sobre todo los fenómenos que genera la comunicación del saber"

"La didáctica de la matemática puede caracterizarse como la disciplina científica interesada por la investigación, que trata de comprender el funcionamiento de la enseñanza de la matemática en su conjunto así como el de los sistemas didácticos específicos (profesor, estudiante, conocimiento) y particularmente comprometida con la elaboración de teorías " (Batanero, 1998)

A través de los años se han trabajado diversas metodologías dentro de la educación matemática como son:

- El experimento didáctico: el cual fue desarrollado originalmente en la unión soviética bajo la influencia de las escuelas psicológicas y educacionales soviéticas.
- La ingeniería Didáctica: Es una creación de la escuela didáctica francesa.
- La lección de Investigación: La cual es una metodología desarrollada en Japón. (Julio Mosquera, 2008)

A su vez la enseñanza de la matemática puede ser vista desde diversos enfoques los cuales tienen por objeto el estudio del matemático profesional, la enseñanza del profesor, el objeto de aprendizaje de los estudiantes.

Para el desarrollo de este proyecto se tomará como guía la denominada “Escuela Francesa” la cual nació en los años 70, de las preocupaciones de un grupo de investigadores en su mayoría matemáticos de habla francesa, por descubrir e interpretar los fenómenos y procesos ligados a la adquisición y a la trasmisión del conocimiento matemático. (Panizza, 2003)

De esta escuela francesa se puede decir que su principal precursor es Guy Brousseau el cual presenta la Teoría de la Situaciones Didácticas las cuales tienen como base fundamental que el conocimiento o aprendizaje puede estar dado por un contexto entendido este como una Acción entre pares o más individuos.

> “… *la descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de la que hacen o podrían hacer, ya para considerar cómo éstos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores…”*

Según Guy Brousseau una *situación didáctica* incorpora diversos campos del ser humano como son las relaciones *entre los estudiante*, las relaciones que existen entre los *estudiantes y el entorno* en el cual se encuentra, todas aquellas cosas que lo rodean, los elementos que están a su alcance para el aprendizaje y demás instrumentos a su alrededor, también está la relación   entre el *estudiante y el profesor* y el rol que este desempeña en el proceso de aprendizaje así como la pertinencia de sus conceptos y capacidades en este aprendizaje.

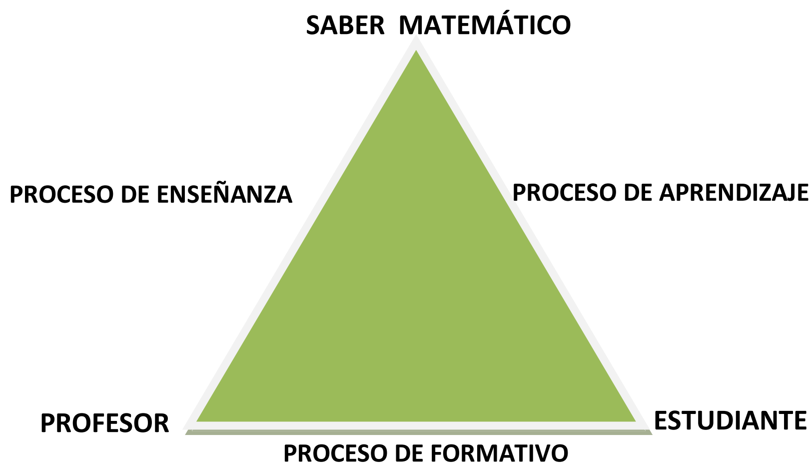


Ilustración 2   Saber Matemático GUY   BROUSEAU

De igual forma Brousseau dice que debe existir una *situación a-didáctica;* la cual describe como un momento en que se debe llegar durante la situación didáctica; es decir un periodo en el que el estudiante con ayuda del maestro en la parte inicial de la situación didáctica, logre asumir una autonomía ante un problema planteado, realizando sus propios procedimientos en búsqueda de la solución sin ser cohibido por el conocimiento de su profesor o sobre lo que él espera de sus resultados.

Por la complejidad de las situaciones didáctica planteadas por Brousseau este decide hablar de varias situaciones didácticas, en las cuales se basará el desarrollo de las actividades a desarrollar en el presente proyecto, es así como en esta parte describiremos cada una de estas situaciones y se enunciará su aporte al proyecto.

Situación Didáctica:

Introducción

Antes de desarrollar las fases de la situación a-didáctica y llegar a la institucionalización, primero se debe iniciar con la orientación por parte del docente informando a los estudiantes las normas ó reglas acerca de cómo debe efectuarse la actividad en el aula propuesta por el mismo profesor. Aquí el docente interviene ó interactúa con los alumnos.

En el desarrollo del presente proyecto en esta fase se presentarán los tutoriales que se manejaran para el desarrollo de la estrategia didáctica, es decir el docente enseñará a los estudiantes el uso de los programas Winplot y wxMáxima, así como los comandos mínimos que el estudiante debe manejar para el desarrollo de su trabajo, de igual manera se iniciará dando los conceptos previos de cada uno de los temas para que el estudiante tenga bases para las siguientes situaciones.

Situación A-Didáctica:

Acción

Esta situación busca que el estudiante se habitúe a un problema, el cual ha sido expuesto al principio de clase por parte del docente; es decir es una situación didáctica, que busca que el mismo alumno efectué diferentes acciones para lograr obtener la solución de ese problema, para ello el estudiante puede basarse en conceptos previos frente a su aprendizaje.

En esta fase es fundamental; ya que el estudiante tiene la oportunidad de interactuar, observar, analizar y de reflexionar acerca del resultado de su propia acción para la construcción del conocimiento.

Formulación

En esta fase radica el trabajo en grupo, se busca una comunicación verbal; es decir, los estudiantes tienen la posibilidad de debatir e intercambiar información con los demás compañeros del aula acerca de sus deducciones, (interacción entre emisor y receptor) cada uno de ellos se verán forzados a justificar y formular sus ideas modificando el lenguaje e interactuando con el medio didáctico.

Dúrate el desarrollo del proyecto los estudiantes trabajarán en su etapa de acción desarrollando talleres individuales en los cuales demuestren los conocimientos adquiridos y como este aprendizaje ha sido significativo, en esta etapa existirán un taller el cual los estudiantes deben exponer a sus compañeros, cada grupo debe realizar una pregunta preparada y coherente así como una corrección a la exposición realizada por cada grupo.

Con esto se busca la interacción entre los estudiantes y que cada uno de ellos aporte de alguna forma en el conocimiento trabajado dentro del aula de clase.

Validación

El fin de esta fase corresponde a que el resultado de la formulación obtenida sea verdadera y que sea defendida por el acuerdo grupal, además debe lograr de convencer al resto de compañeros que esa formulación tiene validez; sin embargo, el estudiante mismo debe argumentar y justificar la eficacia de esa formulación comprobándolo por medio de pruebas ó experimentos.

En caso de que no haya acuerdo con el resto de grupo o no sea válida la afirmación se puede regresar nuevamente a la fase de acción para despejar cualquier duda o retroalimentarla.

Durante el desarrollo de las exposiciones realizadas por cada grupo se observara la forma en la cual se plantean sus argumentos, demuestra sus posiciones y efectúa operaciones de forma acertada y dando total claridad en cada uno de los pasos desarrollados, si esto sucede se concluirá con el desarrollo de estas fases de lo contrario el docente debe generar alguna alternativa que afiance los conceptos vistos y puede desarrollarla iniciando desde la situación acción planteada anteriormente.

Situación Didáctica

Institucionalización

En esta etapa la institucionalización es transformada; ya que a partir de un problema que se planteó al inicio de la clase se finaliza construyendo un conocimiento, durante todo el proceso de la actividad en el aula. En ese instante la intervención del docente frente al grupo de estudiantes es trascendental; ya que se reúnen diferentes resultados, y en base a ellos se aclara dudas y se fortalece aún más el conocimiento.

Ahora qué papel juega los estudiantes en esta fase, ellos han construido su propio conocimiento, pero ese conocimiento pasa hacer un saber que prácticamente ha sido transformado por ellos mismos a partir de una situación de acción.

Los conceptos institucionalizados serán la base sobre el cual se obtendrá nuevos conocimientos.

En esta etapa se realizará una recolección de información por parte de los estudiantes, en la cual el docente aclara cualquier duda que los estudiantes hayan desarrollado durante las situaciones anteriores, además el desarrollará una clase por medio de la cual se defina de forma rigurosa los conceptos tratados durante todo el desarrollo de las situaciones, de igual manera se evaluará que dichos conceptos impliquen los mismo en todos los estudiantes, es decir que todos entiendas de forma acertada cada uno de ellos.

Referente Estadístico

El referente Estadístico consta de dos partes, la parte psicométrica en la cual se habla del análisis de cada uno de los ítems de las pruebas aplicadas, y la parte estadística en la cual se habla acerca del análisis de los datos obtenidos en la investigación.

Psicométrico

La psicometría nace de la necesidad existente en la psicología para conocer o caracterizar un grupo de sujetos de estudio, esta utiliza la estadística para construir y diseñar instrumentos de medición lo cual le permitirá determinar valores numéricos a las diversas particularidades personales, actitudes, habilidades entre otras características de los sujetos de estudio, en otras palabras podemos definir la Psicométrica como "*la encargada de realizar mediciones a los atributos individuales*".

Los diferentes núcleos de la psicología están dados por:

a. Teorías de la medición: Tiene como objetivo el establecer escalas numéricas o el crear condiciones para poder asignar valores numéricos al desarrollo de los diversos test.
b. Escalamiento: Son los diversos modelos que se pueden establecer o proponer para la medición de los diversos atributos psicológicos.

c. Teoría de los Test: Spearmen a principios del siglo XX propone una escala matemáticas para medir la puntuación obtenida durante el desarrollo de un Test, esto permite que en 1950 Gulliksen de inicio al estudio de la teoría clásica de los test la cual es explicada en el desarrollo de su libro “Theory of Mental Test” , más adelante se corrigen errores en esta teoría y se da paso a la Teoría de Respuesta del Item, la cual busca analizar de forma práctica la métrica de los Test psicológicos.

Teniendo en cuanta los pasos anteriores se debe tratar de construir un Test teniendo en cuenta diversos pasos los cuales se pueden resumir en:

- Definición del constructo.
- Construcción del test provisional
- Análisis del ítems
- Estudio de la fiabilidad del test.
- Estudio de la validez del Test.

Análisis de Ítems

Para realizar un análisis adecuado de cada uno de los ítems planteados se debe comprobar cada uno de ellos mediante tres sencillos indicadores como son:

a. *El índice de dificultad*: El índice de dificultad de un ítem j esta definido como el cociente entre el número de sujetos que acertaron A_j y el número total de sujetos que lo intentaron resolver N_j, se denota de la forma $P_j = \frac{A_j}{N_j}$. Este valor puede estar entre 0 (ninguno sujeto acierta) y 1 (Todos los que intentaron contestar acertaron).

El índice de dificultad de cada ítem se evalúa como muy fácil, fácil, normal, difícil o muy difícil según el porcentaje obtenido en su análisis, como se enseña en la siguiente tabla.

Índice de dificultad (P)	
MF: Muy fácil	$MF \geq 0.75$
F: Fácil	$0.55 \leq F < 0.75$
N: Normal	$0.45 \leq N < 0.55$
D: Difícil	$0.25 \leq D < 0.45$
MD: Muy difícil	$MD < 0.25$

Se busca en el desarrollo de cualquier Test que el planteamiento de los ítem según este criterio este dado por: ítems muy fáciles 10%, ítems fáciles 20%, ítems normales 40%, ítems difíciles 20%, ítems muy difíciles 10%, buscando que la distribución de estos ítems sea simétrica.

b. *El índice de discriminación*:

El índice de discriminación se denota como $D_j = \frac{GA_j - GB_j}{0.27\ N}$, donde GA_j es el número de aciertos del reactivo j del 27% de los sujetos que tuvieron mayor puntuación total en el test, GB_j es el número de aciertos del mismo reactivo del 27% de los sujetos que tuvieron menor puntuación total en el test, y N es el número de sujetos que contestaron el test. Un reactivo o ítem se considera que proporciona una buena discriminación si $D \geq 0.3$.

c. El índice de homogeneidad:

Se denota como r_{jX} que es la correlación de Pearson entre las puntuaciones de los sujetos en el ítem j y las situaciones empíricas X en el test total. r_{jX} debe estar entre -1 y 1 y en este caso mide la consistencia del ítem en el test. Los ítems con índice de homogeneidad negativo miden algo diferente a lo que está midiendo la prueba total. A continuación se muestra la tabla utilizada para clasificar los ítems según los rangos establecidos en el índice de homogeneidad.

ÍNDICE DE HOMOGENEIDAD	
P: Pésima	$\mathbf{P} < 0$
PD: Pobre- Descartar	$0 \leq \mathbf{PD} < 0.2$
RR: Regular-Revisar	$0.2 \leq \mathbf{RR} < 0.29$
BM: Bueno- Mejorar	$0.29 \leq \mathbf{BM} < 0.39$
C: Conservar	$\mathbf{C} \geq 0.39$

Estadístico

Prueba de hipótesis

Es un procedimiento basado en la evidencia muestral y la teoría de probabilidad que se emplea para determinar si la hipótesis es una afirmación razonable. Iniciada por Ronald Fisher y posteriormente por Jerzy Neyman y Karl Pearson.

El objetivo de la prueba de hipótesis no es cuestionar el valor calculado del estadístico (muestral), sino hacer un juicio con respecto a la diferencia entre estadístico de muestra y un valor planteado del parámetro.

Identificación de hipótesis:

Hipótesis bilateral $H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

Hipótesis Unilateral derecha $H_0: \mu \leq \mu_0 \quad H_1: \mu > \mu_0$

Hipótesis Unilateral izquierda $H_0: \mu \geq \mu_0 \quad H_1: \mu \leq \mu_0$

La hipótesis Nula (H_0)

Estas hipótesis son sobre relaciones que se establecen entre distintas variables en las que se rechaza o niega aquello que es afirmado por la hipótesis de la investigación, en general la hipótesis nula no se “acepta” sino que se “se rechaza” o “no se rechaza”.

La hipótesis alternativa (H_1)

Esta hipótesis contiene conjeturas o suposiciones de explicaciones diferentes a las que fueron planteadas por las hipótesis nulas y las de Investigación. Se recurre a esta cuando la de investigación ha sido rechazada y la nula no es aceptada. Procedimiento para la prueba de hipótesis

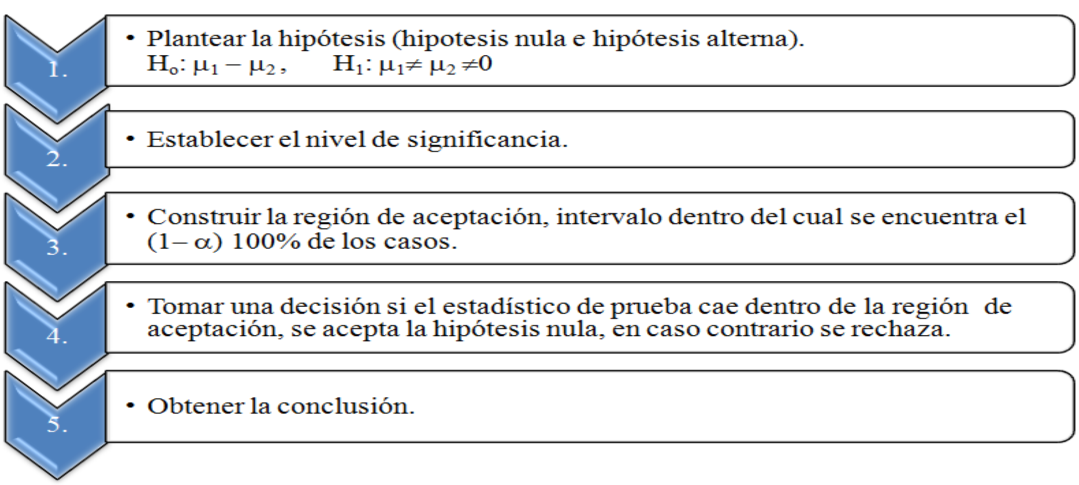


Ilustración 3 Procedimiento para la prueba de Hipótesis

En las pruebas de hipótesis se presentan tres casos de zonas críticas conocidas también como zonas de rechazo de la hipótesis nula. A continuación se observa los tres casos.

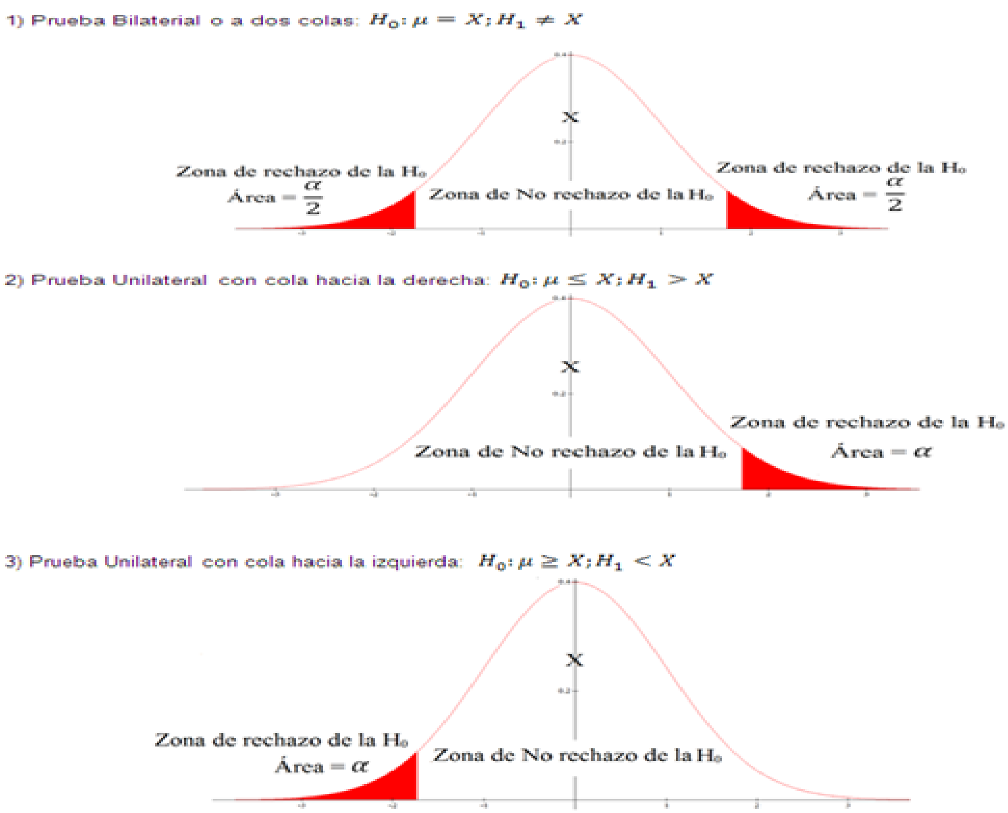


Ilustración 4: http://www.monografias.com/trabajos91/prueba-hipotesis-medias-excel-y-winstats/prueba-hipotesis-medias-excel-y-winstats.shtml

Errores de tipo I y tipo II

El error de tipo I es aquel que se comete al rechazar una hipótesis nula cuando ella es verdadera. La probabilidad de cometer un error de tipo I se simboliza con la letra griega∝; que también se conoce como nivel de significancia de un test.

$\alpha = P\ (rechazar\ \ H_0/H_0$ es verdadera)

El error de tipo II es aquel que se comete al no rechazar una hipótesis nula cuando en realidad es falsa. La probabilidad de cometer un error de tipo II se simboliza con la letra griega β.

$$\beta = P(no\ rechaza\ H_0/H_0\ \ es\ falsa)$$

En resumen se obtiene la siguiente tabla.

	No se rechaza H_0	Se rechaza H_0
H_0 es verdadera	Decisión correcta	Error Tipo I
H_0 es falsa	Error Tipo II	Decisión correcta

Valor de p

Es el nivel de significancia alcanzado. El nivel de significancia más pequeño al cual los datos observados indican que la hipótesis nula debe ser rechazada.

Si W es un estadístico de prueba y w_0 es el valor observado, entonces para calcular el valor p para valores pequeños de la pruebaW, es el siguiente:

Valor $p = p\ (W \leq w_0)$, cuando la hipótesis nula (H_0) es verdadera.

Ahora para valores grandes de W, el valor p asociado al valor observado es:

Valor $p = p\ (W \geq\ w_0)$, cuando la hipótesis nula (H_0) es verdadera.

Donde w_0 es el valor asociado de W.

Prueba de normalidad

Se dice que la normalidad es cuando los valores de la variable aleatoria dependiente siguen una distribución normal en la población a la que pertenecen a la muestra.

Hay varios tipos de pruebas de normalidad. Las pruebas de normalidad más conocidas y usadas son: La prueba de Kolmogorov-Smirnov y la prueba de Shapiro – Wilk.

La prueba de Hipótesis para normalidad

H_0 : La variable en estudio de la población tiene distribución normal.

H_1: La variable en estudio de la población es distinta a la distribución normal.

La prueba de Kolmogorov-Smirnov se utiliza cuando el tamaño de la muestra es mayor o igual a 50 datos u observaciones. Y la prueba de Shapiro – Wilk se utiliza cuando el tamaño de la muestra es menor a 50 datos. Además se debe tener cuando no se rechaza la hipótesis y cuando se rechaza la hipótesis para esto tenemos en cuenta el sig (Asíntota bilateral) o lo mismo que el p-valor. Las condiciones son las siguientes:

- Si el *p-valor* es mayor al nivel de significancia que (α= 0.05), entonces se elige la hipótesis nula (H_0), esto significa que no se rechaza la hipótesis nula luego se deduce que la variable en estudio tiene una distribución normal.

- Si el *p*-valor es menor al nivel de significancia (α= 0.05), entonces se elige la hipótesis alternativa (H_1), esto significa que se rechaza la hipótesis alternativa, luego se deduce que la variable en estudio de la población es diferente a la distribución normal, por lo tanto no se puede aplicar pruebas estadísticas paramétricas, se deben efectuar pruebas estadísticas *no paramétricas.*

Pruebas estadísticas:

Existen dos clases de pruebas estadísticas: La paramétricas y las No paramétricas.

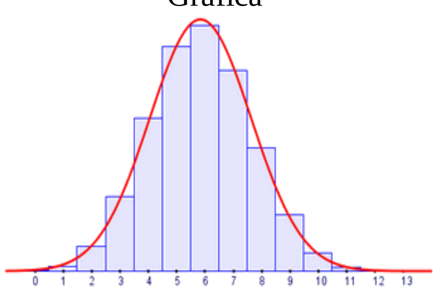
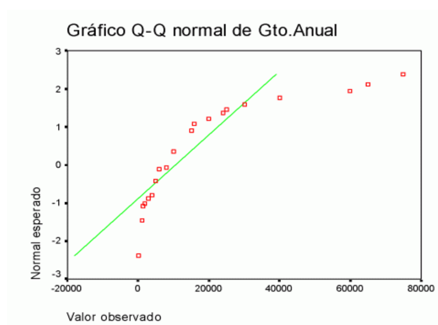
La prueba no paramétrica es una prueba con la cual se identifican dos grupos basadas en el análisis de dos muestras extraídas de manera independiente y de forma aleatoria cuyos datos han sido al menos en una escala de nivel ordinal.

La prueba de Hipótesis para diferencia de medias

H_0 : Las medianas de las dos poblaciones son similares.

H_1: Las medianas de las dos poblaciones no son similares.

A continuación se presenta un cuadro en el cual se puede reflejar algunas de las características encontradas entre los tipos de datos, y las pruebas asociadas a los mismos.

PARAMETRICAS	NO PARAMETRICAS
• Muestras obtenidas aleatoriamente • Distribución normal de las observaciones • Existe un parámetro de interés que se busca estimar • Prueba de correlación de Pearson y la regresión lineal • La prueba "t" Gráfica  Ilustración 5: Grafica pruebas paramétricas.	• No usa valores sino rangos • No se basa en la media sino en la mediana • Pueden ser datos que estén en una escala ordinal. • Prueba de U Mann-Whitney Gráfica  Ilustración 6: Grafica pruebas no paramétricas.

La Prueba U de MANN- WHITNEY (dos muestras independientes)

Prueba de Mann-Whitney Es la más conocida de las pruebas para dos muestras independientes, esta prueba es muy similar a la de la prueba de Wilcoxon. La diferencia básica entre las dos se debe que hay entre las pruebas un diseño relacionado en el que se utilizan los mismos sujetos y un diseño no relacionado en el cual se utilizan sujetos diferentes.

La prueba de Mann-Whitney ordena por rango los puntajes de todos los sujetos en ambas condiciones como si fuera un solo grupo de puntajes.

- Si la diferencias entre las dos condiciones se deben al azar, como lo afirma la hipótesis nula, los puntajes deben ser aproximadamente iguales y, por lo tanto debe haber rangos aproximadamente iguales en ambas condiciones.
- Si predominan los rangos altos o bajos en una de las condiciones, la diferencia en el total de puntajes ordenados por rango en cada condición se deberá probablemente, no al azar sino a los efectos predichos de la variable independiente.
- Si el total de rangos bajo una de las condiciones es muy pequeño debe haber entonces una preponderancia de rangos altos en la otra condición.

Un estadístico llamado U refleja el menor de los totales de los rangos. Mientras más pequeño sea U, más significativas serán las diferencias de rangos entre las dos condiciones.

Para calcular el estadístico de prueba *U* de Mann-Whitney se asigna a cada uno de los valores de las dos muestras su rango para construir

$$U = n_1 \, n_2 + \frac{n_x \ (n_x \ + 1)}{2} - \ T_x$$

Dónde:

n_1 = número de sujetos en el grupo 1

n_2 = número de sujetos en el grupo 2

T_x = el mayor de los totales de los rangos

n_x = número de sujetos en el grupo que obtuvo el mayor de los totales de rangos.

Instrucciones para calcular el valor de U

a. Se ordenan los valores de las dos muestras conjuntamente
b. Se asignan un rango de orden a cada valor
c. Se promedian los valores ya que pueden repetirse, después se ordenan los datos con sus respectivos valores.
d. Se calcula R_1 y R_2, ya que R_1 sería la suma de los rangos de la primera muestra y R_2 sería la suma de los rangos de la segunda muestra
e. Se calcula el valor experimental a través de la siguiente fórmula:

$$U = Min(U_1, U_2) \quad \text{Donde:}$$

$$U_{1=} n_1 \, . \, n_2 + \frac{n_1 \, (n_1 \ + 1)}{2} \ - \mathrm{R}_1$$

$$U_{2=} n_1 \, . \, n_2 + \frac{n_2 \, (n_2 \; + 1)}{2} \; - \mathrm{R}_2$$

f. Se determina el valor de Z para determinar si no se rechaza la hipótesis o se rechaza la hipótesis y este procedimiento se efectúa a continuación de la siguiente forma:

$$Z = \frac{U - (n_1 \, . n_2/2)}{\sqrt{n_1 \, . \, n_2 \; (n_1 + n_2 \; + 1}/12}$$

A continuación se observa un esquema de información en el que se aplica la prueba U Mann Whitney con una serie de datos en el programa SPSS

Estadisticos de contraste[a]

	independencia
U de Mann-Whitney	1267,000
W de Wilcoxon	2698,000
Z	-,214
Sig. asintót. (bilateral)	,831

a. Variable de agrupación: GENERO

- Z. Si $Z \leq Z_\alpha$ entonces No se rechaza la hipótesis nula $(H_{0)}$, ahora si $Z > Z_\alpha$ entonces se rechaza la hipótesis nula (H_0). Donde Z_α es igual a 1.96 0 -1.96

- Sig.asintó (bilateral) que me informa $P - valor$ en este caso tenemos que es 0.831 que es mayor al nivel de significancia, es decir $P - valor > 0.05$ luego se deduce que la hipótesis nula no se rechaza.

Suposiciones o (postulados)

1. Ambas muestras son muestras al azar de los grupos respectivamente.
2. Además de independencia dentro de cada muestra, hay independencia mutua entre las dos muestras.
3. La escala de medición es al menos ordinal.

Hipótesis

Sean $\boldsymbol{M_{e1}}$ y $\boldsymbol{M_{e2}}$ las distribución de funciones correspondientes al grupo 1 y grupo 2. Entonces la hipótesis puede ser de la siguiente manera.

$$\boldsymbol{H_o : M_{e1} = M_{e2}}$$

$$\boldsymbol{H_1 : M_{e1} \neq M_{e2}}$$

CAPITULO 3

Desarrollo de la Investigación

Esta investigación surgió de la necesidad de diversas didácticas que faciliten la enseñanza de algebra lineal, su planteamiento se inició en el marco de la maestría de Docencia e Investigación Universitaria de la Universidad Sergio Arboleda.

La investigación fue aplicada en la universidad Escuela Colombiana de Carreras Industriales (ECCI) de Colombia, a estudiantes de primer semestre de ingeniería de jornada diurna, los cuales se encontraban cursando la asignatura de Algebra Lineal, dichos estudiantes se dividieron en dos grupos, el primero de ellos se denominó grupo control y el segundo denominado grupo experimental.

La investigación se llevó a cabo con los dos grupos, el grupo control que inicio labores académicas con 41 estudiantes y el grupo experimental que inicio con 35 estudiantes, en los dos grupos se vieron los mismos temas y fueron dirigidos por la misma docente e investigadora.

En el transcurso del semestre se retiraron algunos estudiantes pertenecientes tanto en el grupo control como en el grupo experimental, finalmente los cursos terminaron con 21 estudiantes del grupo control y 17 del grupo experimental.

Para inicio de la investigación se realizó una prueba de entrada, (anexo 1) en la cual se deseaba observar el nivel académico de los estudiantes frente al tema de algebra lineal, dicha prueba comprendía 15 preguntas, que involucraba temas como sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes y vectores. Para el desarrollo de esta prueba los estudiantes contaron con 50 minutos, la prueba era de selección múltiple con única respuesta, los dos grupos presentaron la misma prueba, en la cual se obtuvieron diversos resultados que forman parte fundamental de la investigación y los cuales serán analizados más adelante.

La investigación, presentó diversos inconvenientes como fueron:

1. Cambio de coordinador en las Ingenierías: Ante el cambio de coordinador las temáticas vistas durante la carrera fueron cambiadas por tal razón se vio afectado el cronograma inicial de la investigación.

2. Salas de Sistemas: Ya que la investigación tenía como base la ayuda de programas computacionales, en cada una de las situaciones didácticas planteadas por Brousseau, era necesario el poseer herramientas computacionales para el desarrollo de la misma, esto no fue posible hasta inicios del mes de septiembre, durante este tiempo la docente aclaró la base temática de algunos conceptos de algebra lineal como son ecuación, la ecuación de una recta, grafica de una recta, puntos de intersección entre rectas, sistemas de ecuaciones lineales 2×2, incluyendo análisis gráfico y sus métodos de solución, los sistemas de ecuaciones lineales 3×3, eliminación gaussiana, matrices, operaciones y teoremas de dichas temáticas, así como los vectores en $\mathbb{R}^2 \ y \ \mathbb{R}^3$. En cada uno de estos temas

la docente hizo uso de los programas Winplot y wx- Máxima con el propósito de familiarizar a los estudiantes con los comandos básicos de estos programas.

3. Instalación de programa: Se presentaron diversas excusas por parte de los encargados de la organización de la sala de sistemas para la instalación de los programas necesarios en el proyecto ya que se creía que los programas Winplot y wx-Máxima no eran de acceso libre o necesitaba algún permiso para ser instalado en los computadores de la sala de sistemas.

Debido a las diversas dificultades ya enunciadas al iniciar el semestre se explicó la metodología que se llevaría a cabo y la estrategia que se aplicaría para la comprensión del concepto de espacio vectorial, es decir se enseñó los temas que se trabajarían durante el semestre, la didáctica que se aplicaría y como el desarrollo de los temas seria mediante talleres algunos de forma individual otros grupal, así como las forma de evaluación, además se mencionó lo que se esperaba del la aplicación de esta estrategia didáctica.

El 6 de Septiembre se inició el trabajo en la sala de sistemas la cual contaba con 20 computadores y la instalación del programa Winplot, ya que wx-Máxima no había sido instalado, se solicitó un permiso para realizar la descarga mediante la página *http://andrejv.github.io/wxmaxima/help.html*, para su uso durante el desarrollo de la investigación, tanto el grupo control como el grupo experimental tenían clase dos veces, cada día contaba con dos horas de clase.

A continuación se mencionarán cada una de las etapas realizadas en el grupo experimental según las Situaciones Didácticas planteadas por Brousseau.

Etapa I

Introducción

Según el planteamiento de las Situaciones Didácticas presentadas por Guy Brousseau se debe dar una introducción en la cual se dé a conocer al estudiante la metodología a desarrollar, así como algunos temas que servirán de guía para el desarrollo de las Situaciones Didácticas.

En esta etapa se trabajaron los siguientes temas; Sistemas de ecuaciones lineales, matrices, funciones polinómicas, y vectores en $\mathbb{R}^2 \ y \ \mathbb{R}^3$ estos temas se desarrollaron entre Agosto 8 y Agosto 30 del 2013.

En forma paralela se inició el trabajo de Winplot y wx- Máxima con los tutoriales de cada uno de los programas, de trabajaron en el siguiente orden.

1. Se da a conocer a los estudiantes el procedimiento que deben seguir para descargar los programas desde internet para que ellos tengan la posibilidad de trabajar los temas fuera

del aula, ya que en algunas ocasiones no será resuelto el taller en su totalidad en clase y deberá ser desarrollado de forma extra clase y enviado al correo de la docente.

2. El conocimiento de los iconos y herramientas de cada programa los cuáles eran necesarios para el desarrollo de la investigación, solo fueron enseñadas las aplicaciones y los iconos necesarios para la investigación, ya que la investigación no buscaba el instruir al estudiante en el dominio de estos programas sino que ellos constituían una herramienta de ayuda para la investigación.(Ver anexo 2).

Además en esta etapa de la investigación se da a los estudiantes la metodología que se llevará durante el semestre, las responsabilidades que adquieren en la solución de diversos talleres con ayuda de los programas, lo cual es realizado tanto dentro y fuera del aula.

Etapa II

Situación a-didáctica:

Las situaciones a-didácticas son aquellas en las cuales el docente no interviene en el proceso de aprendizaje, llevado a cabo por parte del estudiante, en el desarrollo de la investigación estas situaciones a- didácticas estuvieron determinadas por:

Acción

La primera de las situaciones a-didácticas es la Acción, en esta fase la investigación ya se cuenta con las herramientas necesarias para la aplicación de la misma (instalación programas sala de sistemas), durante esta situación didáctica se busca que el estudiante de forma individual aplique los conceptos vistos en la introducción, así el estudiante interactúa con las herramientas tecnológicas y afianza la definición de algunos conceptos bases para la comprensión del concepto de Espacio Vectorial.

Se inicia la situación a-didáctica informando a los estudiantes como se desarrollará esta fase de la investigación, es decir se le entregarán tres talleres y se le indica que cada uno de estos talleres debe ser resuelto de forma individual durante el transcurso de una semana.

A continuación se detallará la construcción, temas y objetivo de cada uno de los talleres.

El primer taller es acerca de los sistemas de ecuaciones lineales; se plantean seis ejercicios en los cuales el estudiante debe encontrar su solución analítica y gráfica, este taller busca que el estudiante resuelva un sistema de ecuaciones de forma manual, realice el procedimiento analítico con la ayuda del programa wx-maxima y por último la grafica con ayuda del programa Winplot. El objetivo del taller es que el estudiante se apropie del concepto de sistemas de ecuaciones, además que él observe como pueden ser planteados y solucionados los diversos sistemas de ecuaciones, mediante la ayuda de los dos programas (Ver anexo 3).

El segundo taller tiene como tema las matrices, en este taller se plantean dos puntos en los cuales se pide al estudiante que realice diversas operaciones entre matrices, se trabajan además vectores los cuales fueron graficados por los estudiantes en el programa Winplot, y los cálculos en el programa wx-Máxima, de igual manera que los cálculos realizados en las operaciones entre matrices, es de resaltar que los estudiantes ya habían visto este tema en la parte de introducción, así como los métodos de solución mediante el método gaussiano y por determinantes. El objetivo de este taller es el introducir de forma indirecta al estudiante en el concepto de Espacio Vectorial, ya que algunas de las operaciones que se plantean en el taller forman parte de los axiomas de Espacio Vectorial. (Ver anexo 4)

En el tercer taller está enfocado a los axiomas de espacio vectorial, tiene cuatro puntos en los cuales el estudiante realiza diversas operaciones como suma, resta, multiplicación, con vectores $\mathbb{R}^2\ y\ \mathbb{R}^3$, matrices y funciones polinómicas, cada una de las operaciones realizadas por el estudiante en este taller ya constituye parte de alguna propiedad que debe cumplir un Espacio Vectorial, el objetivo del taller es que el estudiante identifique cada uno de los axiomas de Espacio Vectorial, además que empiece a observar cómo tanto las matrices, funciones y vectores en $\mathbb{R}^2\ y\ \mathbb{R}^3$, constituyen cada uno un Espacio Vectorial.(Ver anexo 5)

Cada uno de los talleres es entregado al estudiante durante la clase y tiene tiempo de solución durante una semana, si por alguna razón no culmina con el taller, lo faltante será realizado de forma extra clase y enviado al correo de la docente antes de la siguiente clase.

Formulación

Esta fase tiene como propósito el que los estudiantes socialicen el conocimiento y así lograr fortalecer la enseñanza y el aprendizaje entre ellos, para ello se forman dentro del salón de clase tres grupos de cuatro y uno de cinco integrantes, cada grupo escoge un representante, él cual es el encargado de llevar la vocería del grupo, recoger las opiniones de cada uno de sus compañeros además de ser el monitor y guía del mismo.

Al ser realizados los grupos se entrega un taller el cual está constituido por seis puntos acerca de los temas de vectores $\mathbb{R}^2 \; y \; \mathbb{R}^3$, matrices y funciones polinómica, cada punto presenta diversos interrogantes en los cuales los estudiantes deben debatir el procedimiento que debe realizarse para llegar a la respuesta acertada en cada uno de ellos. El objetivo del taller es que los estudiantes mediante el desarrollo de este construyan el concepto de Espacio Vectorial teniendo en cuenta los axiomas y las propiedades de los mismos. (Ver Anexo 6).

El grupo debe desarrollar cada ítem del taller con ayuda de los programas wx-Máxima y Winplot, además deben preparar la pregunta que realizará a cada uno de los otros grupos de la clase, así como una corrección que considere adecuada al tema.

Tan pronto como el taller es entregado surgen algunas dudas por parte de los estudiantes, sobre el planteamiento de los ítems, las cuales son resueltas por algún compañero del grupo de o de clase, al leer cada uno de los axiomas surgen dudas en los grupos las cuales son solucionadas por el monitor, y si este no posee la respuesta consultan los apunte y los temas vistos para la solución del mismo.

Cada uno de los puntos del taller son resueltos tanto en los programas como en el cuaderno, se observar que muchos de los integrantes de los grupos presentan dificultad en la escritura de algunos símbolos en el programa wx-Máxima los cuales son necesarios para el desarrollo del taller, por tal razón la docente debe intervenir y dar una pequeña explicación de cada uno de los procedimientos que se deben seguir en estos temas.

A continuación se enseña una tabla en la cual se observan algunos ejemplos de los comandos que causaban dificultad en los estudiantes a la hora de realizar algunas operaciones en el programa wx-Máxima.

TEMAS	ÍTEMS	Objetivos de la pregunta
VECTORES $u = (u_1, u_2)$ $v = (v_1, v_2)$	1, 7, 12	• Interpretar la gráfica de un vector en dos dimensiones. • Efectuar las operaciones del vector adecuadamente. • Identificar las propiedades de un vector.
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES $a_1\, x + b_1\, y = c_1$ $a_2\, x + b_2\, y = c_2$	2, 3, 4, 6, 13	• Analizar e interpretar el tipo de gráfica según la solución. • Identificar los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. • Hallar una ecuación implícita a través de un ejercicio.
MATRICES $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	5, 9, 10, 11	• Aplicar las operaciones de matrices (suma y el producto).
DETERMINANTES $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	8	• Identificar las propiedades de un determinante. • Solucionar adecuadamente el determinante efectuando el procedimiento adecuado.
FUNCIONES POLINÓMICAS	14	• Identificar si una función en el caso de las polinómicas es un espacio vectorial.
ESPACIOS VECTORIALES	15	• Identificar los ejemplos de espacios vectoriales efectuando la aplicación de los axiomas.

Validación

Durante esta fase los estudiantes realizan exposiciones demostrando los resultados obtenidos en la formulación, el estudiante representante que fue elegido en esa etapa, el cual en algunas ocasiones coincide con el monitor, debe demostrar que las conclusiones obtenidas durante el desarrollo del taller son verdaderas, de esta manera su objetivo será el convencer al resto de sus compañeros de clase, por lo cual el estudiante debe argumentar y justificar la eficacia del desarrollo de la formulación para la comprensión del concepto de Espacio Vectorial por medio de los programas Winplot y wxMaxima.

Para el desarrollo de dicha actividad se tendrá en cuenta lo siguiente:

- El trabajo debe ser expuesto en el programa Power Point.
- El estudiante representante: Cada grupo seleccionará su estudiante representante, teniendo en cuenta las habilidades comunicativas que posee cada uno de los integrantes del grupo.
- El estudiante Interventor: Se escoge un estudiante (el mejor en el tema en la clase) el cual interviene en la clase, opina y juzga la validación del estudiante representante en la presentación.

Los grupos quedaran distribuidos de la siguiente manara:

El representante 1 será el que representa al grupo no.1, el representante 2 será el que representa al grupo no.2, y así sucesivamente con los grupos 3 y 4.

Un integrante del grupo 2 pasa a la pizarra y anota de nuevo los axiomas de los espacios vectoriales.

El representante del grupo No.1, exhibe el desarrollo de los puntos 1 y 2 del taller, donde el estudiante expone al grupo el contenido de polinomios en referencia al tema de los espacios vectoriales como se observa en la ilustración 7.

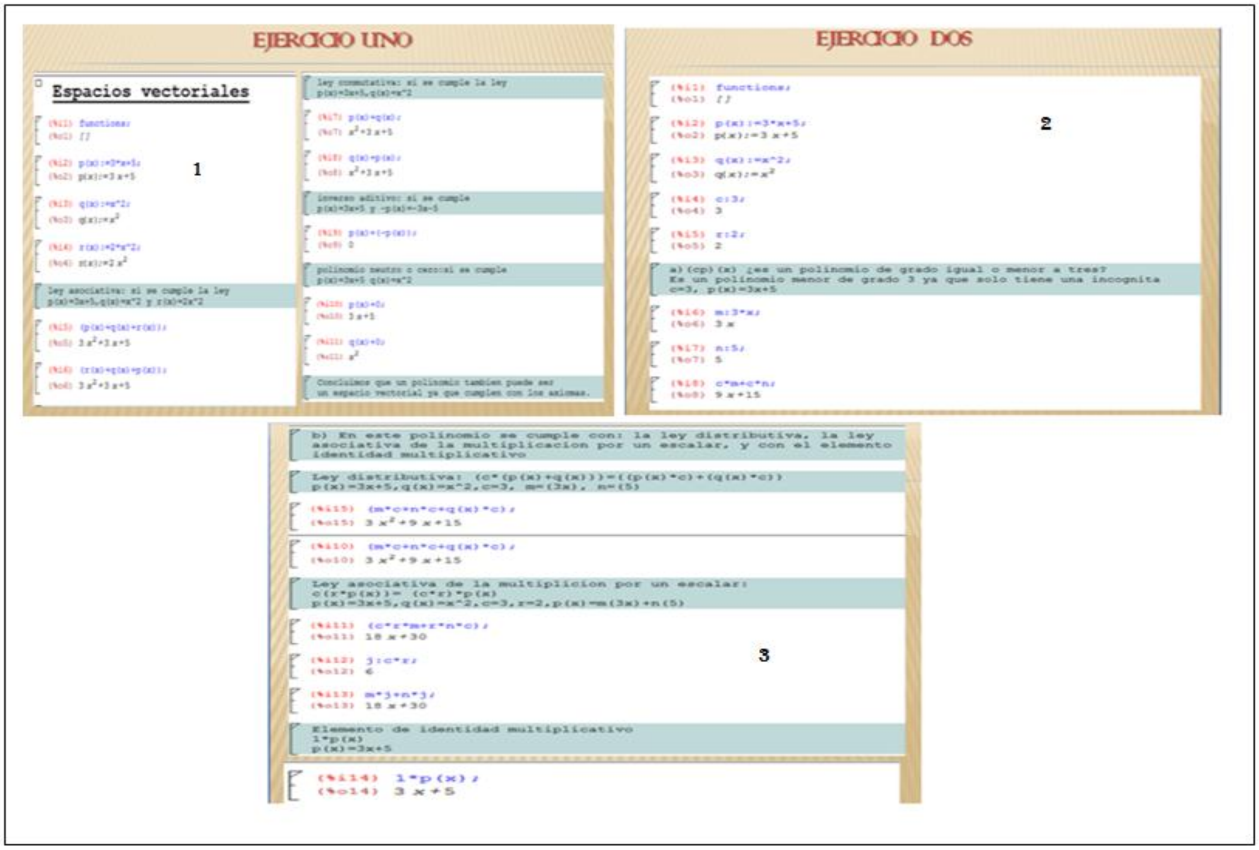


Ilustración 7

Luego el estudiante concluye que un polinomio es un espacio vectorial ya que cumple con todos los axiomas.

Ahora el representante del grupo No.2 lee el ejercicio del numeral 3 que hace referencia al tema de funciones, realiza su respectiva exposición (ilustración 8) y de esta forma menciona como su grupo llego a la conclusión de que las funciones también constituyen un Espacio Vectorial.

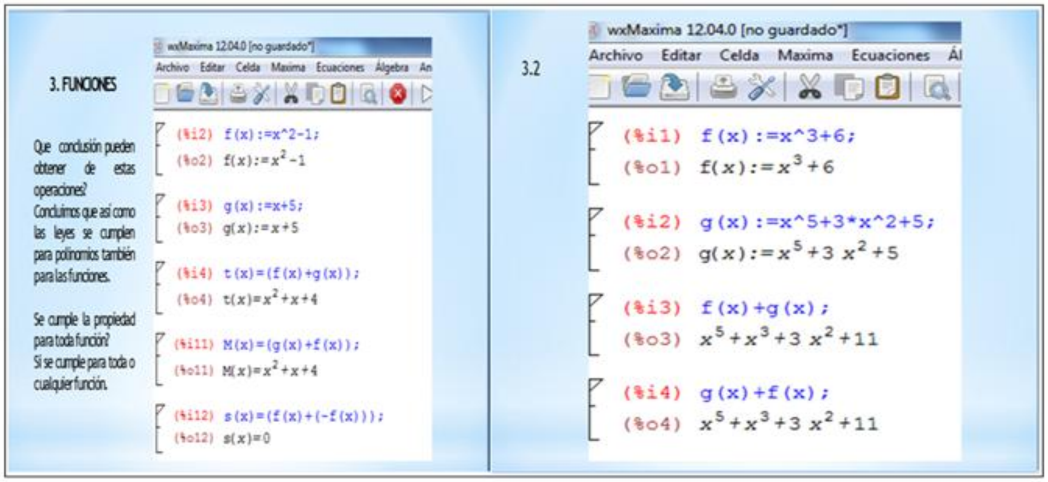


Ilustración 8

El representante del grupo No. 3 exhibe el desarrollo del punto 4 con sus apartados, el tema hace referencia a los vectores, igual que los grupos anteriores enseña (Ilustración 9) como su grupo desarrollo los diversos axiomas para llegara a la conclusión que los vectores también constituyen un Espacio Vectorial.

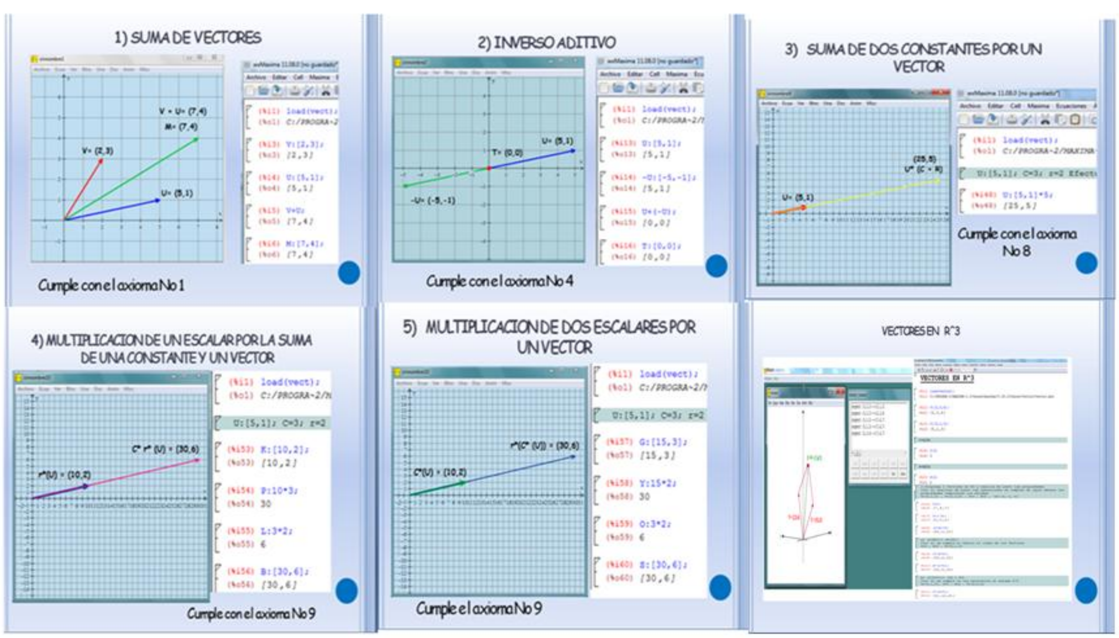


Ilustración 9

El representante del grupo No. 4, presenta el punto 5 y 6 del taller sobre el tema de matrices donde a través de su presentación especifican cada uno los axiomas resolviéndolo adecuadamente y llegar a la conclusión de las matrices es un espacio vectorial. (Ilustración 7)

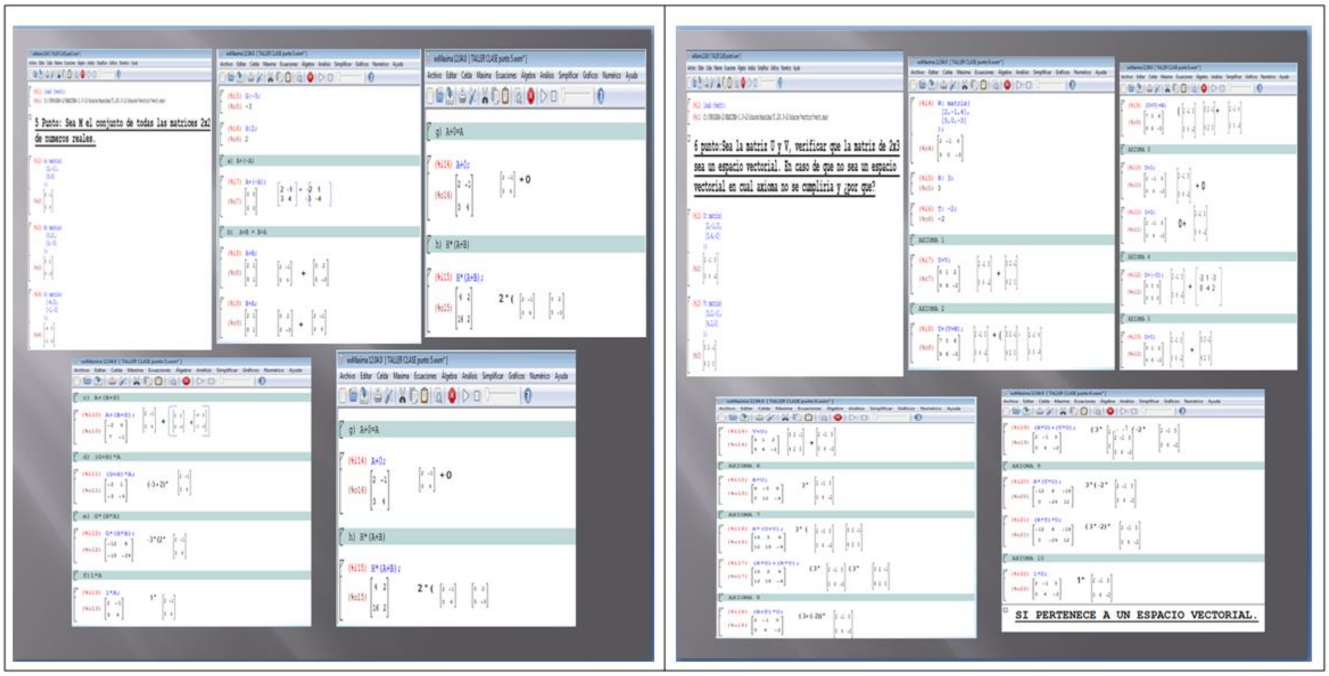


Ilustración 10

Institucionalización

Ahora la docente interviene y anota las conclusiones y las preguntas que tengan los estudiantes acerca del taller. La docente escribe una ecuación en el tablero para que el estudiante lo resuelva en el cuaderno (Ilustración 8), un estudiante del grupo desarrolla el procedimiento con la ayuda de el programa winplot y wxMaxima. (Ilustración 9)

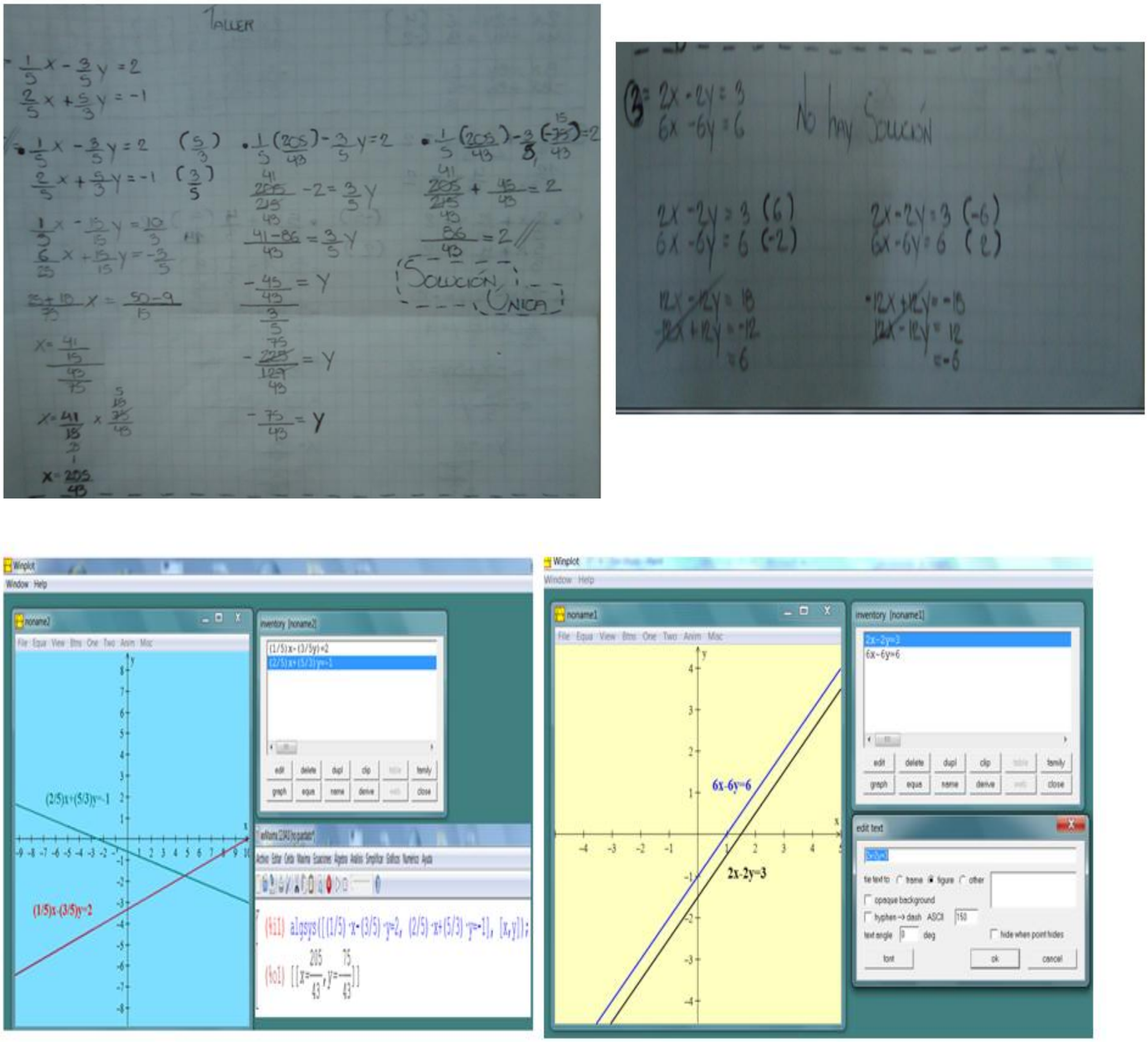


Ilustración 11

Los estudiantes verifican el resultado. Luego la docente de nuevo escribe en el tablero una matriz y los estudiantes lo realizan en el cuaderno desarrollándolo con los axiomas y en los programas winplot y wxMaxima similarmente efectúan el ejercicio.

Mediante este proceso se busca que los estudiantes comprueben que los pasos realizados durante el desarrollo del taller para demostrar los axiomas de Espacio Vectorial fueran correctos, si ocurriera lo contrarió que ellos encontraran su equivocación y de esta forma lograr afianzar todo su proceso en la comprensión del concepto de Espacio Vectorial.

Al finalizar cada una de las Situaciones Didácticas se procede a desarrollar una prueba de salida por medio de la cual se busca demostrar que la estrategia planteada en el grupo Experimental tiene relevancia en la comprensión del concepto de Espacio Vectorial. Dicha prueba es aplicada a los dos grupo (Control, Experimental), y consta de 15 preguntas las cuales poseen relación con el concepto de Espacio Vectorial, ya sea de forma explícita o implícita. (Ver anexo 7).

CAPITULO 4

Análisis de Resultados

En el desarrollo de la investigación se realizo una prueba de entrada y una de salida para la verificación de la estrategia didáctica planteada, en este capítulo se enseñará el análisis de los resultados obtenidos tanto en la prueba de entrada como en la de salida.

Prueba de Entrada

La prueba de entrada fue aplicada a 38 estudiantes, 17 del llamado grupo Experimental y 21 del grupo Control, de primer semestre de ingeniería de la Universidad ECCI (ver anexo 1), dicha prueba estaba constituida por diversos ítems los cuales se describe a continuación.

TEMAS	ÍTEMS	Objetivos de la pregunta
VECTORES $u = (u_1, u_2)$ $v = (v_1, v_2)$	1, 2, 3, 4, 1 5	• Interpretar la gráfica de un vector en dos dimensiones. • Efectuar las operaciones del vector adecuadamente. • Identificar las propiedades de un vector.
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES $a_1\ x + b_1\, y = c_1$ $a_2\, x + \ b_2\, \mathrm{y} = c_2$	5, 6, 7, 12, 13, 14	• Analizar e interpretar el tipo de gráfica según la solución. • Identificar los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. • Hallar una ecuación implícita a través de un ejercicio.

MATRICES $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	10, 11	• Aplicar las operaciones de matrices (suma y el producto).
DETERMINANTES $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	8, 9	• Identificar las propiedades de un determinante. • Solucionar adecuadamente el determinante efectuando el procedimiento adecuado.

Las respuestas dadas por los estudiantes se muestran en las siguientes tablas.

		PRUEBA DE ENTRADA														
GRUPO CONTROL		C	A		A	B	B	A	D				C	B	C	
		C	A	B	A	C	A	A	D	A	C	B	C	B	C	A
		C	A	B	A	B	B	B	D	C	C	B	C	B	C	A
		C	A	B	C	B	D	D	D	D	C	B	C	B	C	A
		C	A	D	A	B	A	B	D	A	C	B	B	A	D	A
		C	A	B	A	C	A	B	D	A	C	A	D	D	B	D
		C	A	D	B	B	B	A	A	B	C	B	C	B	C	B
		C	A	B	A	B	B	B	D	C	C	B	C	B	C	A
		C	A	B	A	B	B	B	D	C	C	B	C	B	C	A
		C	A	B	B	B	A	A	D		A	B	C		C	B
		C	A	B	A	B	A	B	D	D	A	B	C	A	C	A
		C	A	B	B	B	D	B	D	D	A		D		B	
		A	A	B	A	B	D	C	D	D	C	B	D	B	B	C
		C	A	D	A	B	A	C	A	A	B	B	D	B	B	A
		C	A	B	A	B	A	A	D	A	A	B	C	A	B	A
		B	B	B	C	B	C	B	D	A	C	B	C	B	C	A
		C	B	D	B	A	A	C		B	B	A	A	C	D	D
		B	A	C	B	A	A	A	A	D	A			B	C	C
		C	A	D	B	C	D	B	A	A	C	B	C	B	C	C
		C	B	B	D	D	C	D	C	D	C	D	D	B	C	A
		C	A	B	A	B	A	A	D	A	C	B	D	B	B	A

		PRUEBA DE ENTRADA														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
GRUPO EXPERIMENTAL		C	A	B	A	C	A		D	B	C	B	C	B	C	A
		C	A	B	A	C	C	C	D	B	C	B	C	B	C	A
		C	B	B	A	C	C	C	D	B	C	B	C	B	C	A
		C	B	D	A	B	B		D		C	D	C	A	C	A
		B	A	D	B	B	D	D	D	D	C	B	C	A	B	D
		C	A	B	A	C	B	C		B	C	B	A	B	C	A
		C	A	D	A		A	B	D		C	B	C	B	A	A
		C	A	B	A	B	A		D		C	A	C		C	
		C	A	B	A	C	C	D	B	B	C	B	C	B	C	A
		A	A	B	C	C	A		D		C	B				
		C	A	B	B	D	C	B	D	B	C	B	C	B	C	A
		C	B	B	A	B	C	B	D	D	C	B	C	A	C	A
		A	A	B	A	B	A	C	D	D	C	B	C	A	C	D
		C	A	C	A	B	A	C	D	A	C	B	C	B	C	A
		C	A	B	A	B	D		D	C	C	B	C			A
		A	A	B	B	A	B	B	D	D	C	B	D	B	B	C
		C	A	C	A	A	A	D	A	A	C	B	C	B	C	A

Además se realizó un análisis en el programa EXCEL de los distractores en cada uno de los ítems de la prueba los resultados de dicho análisis se muestran en la siguiente tabla.

PREGUANTA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RESPUETA	C	A	B	A	B	B	B	D	C	C	B	C	B	C	A
A	4	32	0	25	4	17	7	5	10	5	3	2	7	1	24
B	3	6	26	9	22	8	13	1	8	2	30	1	24	8	2
C	31	0	3	3	9	7	8	1	4	30	0	26	1	25	4
D	0	0	8	1	2	6	5	29	10	0	2	7	1	2	4
EN BLANCO	0	1	2	1	2	1	6	3	7	2	4	3	6	3	5
TOTAL	38	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39
TOTAL CONTESTADAS	38	38	37	38	37	38	33	36	32	37	35	36	33	36	34
TOTAL ACERTADAS	31	32	26	25	22	8	13	29	4	30	30	26	24	25	24

Mediante la observación de los resultados obtenidos en la tabla podemos concluir:

1. Los distractores dados en los ítems 1, 4,5,7,8,12,13,14, y 15 son considerados como buenos, ya que aun cuando la mayor parte de los estudiantes contestaron la respuesta correcta en los otros distractores existió cierta cantidad considerable de respuestas dadas por los estudiantes.
2. Los distractores dados en los ítems 2, 3,10, y 11 muestran que aun cuando la mayor parte de los estudiantes eligen la respuesta correcta, muy pocos prefieren otro tipo de respuesta, es decir los distractores dados son demasiado débiles en la elección de la respuesta.

3. En los ítems 6 y 9 se puede observar que la mayor parte de los estudiantes eligieron un distractor y muy poco porcentaje de los mismos eligió la respuesta correcta, esto demuestra que los estudiantes dado que los temas no son de su amplio manejo logran equivocarse en la elección de la respuesta.

Análisis de ítems

Para la elaboración de la prueba de entrada y verificación de la misma se tomo en cuenta el análisis de cada uno de los ítems, en el que se observo la dificultad, discriminación, y homogeneidad de cada uno de ellos, de la siguiente forma.

1. *Indicie de Dificultad:* Para la descripción de la dificultad de cada uno de los ítems se tiene en cuenta la tabla mostrada en el Marco Teórico de forma que.

N. ítem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Dificultad	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6	0,2	0,4	0,8	0,1	0,8	0,9	0,7	0,7	0,7	0,7
	MF	**MF**	**F**	**F**	**F**	**MD**	**D**	**MF**	**MD**	**MF**	**MF**	**F**	**F**	**F**	**F**

Como se puede observar en el análisis realizado los ítems 3,4,5,12,13,14,15 que corresponden al 46% de los ítem se pueden catalogar como fáciles, los ítems 1,2,8,10,11 los cuales corresponden al 33% de los ítems se catalogan como muy fáciles, el ítem 1 que corresponde al 7% como difícil y los ítems 6,9 que son el 13% como muy difícil, es de anotar que si bien en la prueba de entrada y salida se realizo un análisis psicométrico enmarcado en las TCS (Técnicas de Clasificación de los Test), no constituye el resultado la importancia de estudiar su comportamiento, si no se realiza para mejora descripción de la prueba.

2. *Indicie de Discriminación*: En el análisis del índice de Discriminación de cada ítem se debe tener en cuenta que el valor encontrado sea $D \geq 3$ para que se consideré que el ítem realmente discrimiana, en la siguiente tabla se muestra el comportamiento de cada uno de los ítems, el análisis fue desarrollado mediante el software EXCEL.

N. ítem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Discriminación	0,7	0,2	0,7	1,0	0,7	0,7	1,0	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7	0,5	0,7	1,0

En los resultados obtenidos al analizar los datos, se puede observar que el índice de discriminación de los ítems es superior al 0,3 que se menciona excepto en el caso del ítem número dos que solo presenta una discriminación del 0,2 pero ya que no esta tan lejana del valor requerido será tenida en cuenta en el análisis total.

3. *Indicie de Homogeneidad*: De igual forma que con los índices de discriminación y de dificultad, se procede a analizar los resultados obtenidos en la prueba de entrada tanto en el grupo control como en el grupo experimental para de esta forma encontrar la homogeneidad presentada por los ítems respecto al test, mediante el programa EXCEL se encontraron los siguientes resultados.

N. ítem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Homogeneidad	0,36	0,20	0,39	0,53	0,33	0,38	0,35	0,37	0,60	0,46	0,46	0,51	0,29	0,44	0,61

Al observar la tabla dada en el marco teórico para el análisis del índice de homogeneidad podemos observar en el análisis de los resultados que la mayor parte de los ítems se encuentra sobre el 0,39 requerido, lo cual hace que se consideren como ítems buenos en el Test y que se deben conservar.

Los ítems 1, 5, 8 y 10 aun cuando no se encuentran sobre el 0,39 requerido se encuentran sobre un valor muy cercano lo cual los considera como ítems buenos dentro del test y a los cuales se les debe realizar algunas mejoras.

Los ítems 2 y 13 son considerados como ítems regulares dentro del test y los cuales deben ser revisados en el momento de la aplicación de la prueba.

Prueba de Salida

La prueba de salida fue presentada Por 38 estudiantes, de igual forma que con la prueba de entrada, se realiza la misma prueba tanto para el grupo de entrada como para el grupo de salida, a continuación se indica la constitución de cada uno de los ítems.

TEMAS	ÍTEMS	Objetivos de la pregunta
VECTORES $u = (u_1, u_2)$ $v = (v_1, v_2)$	1, 7, 12	• Interpretar la gráfica de un vector en dos dimensiones. • Efectuar las operaciones del vector adecuadamente. • Identificar las propiedades de un vector.
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES $a_1\, x + b_1\, y = c_1$ $a_2\, x + b_2\, \mathrm{y} = c_2$	2, 3, 4, 6, 13	• Analizar e interpretar el tipo de gráfica según la solución. • Identificar los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. • Hallar una ecuación implícita a través de un ejercicio.
MATRICES $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	5, 9, 10, 11	• Aplicar las operaciones de matrices (suma y el producto).
DETERMINANTES $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	8	• Identificar las propiedades de un determinante. • Solucionar adecuadamente el determinante efectuando el procedimiento adecuado.
FUNCIONES POLINÓMICAS	14	• Identificar si una función en el c aso de las polinómicas es un espacio vectorial.
ESPACIOS VECTORIALES	15	• Identificar los ejemplos de espacios vectoriales efectuando la aplicación de los axiomas.

De igual forma que con la prueba de entrada en la siguientes dos tablas se enseñan las respuestas de los estudiantes ante la prueba de salida tanto en el grupo control como en el grupo experimental.

	PRUEBA DE SALIDA														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
GRUPO EXPERIMENTAL	C	D	D	A	A	C	A	B	B	C	D	A	C	B	B
	C	D	B	A	A	C	A	B	B	C	D	A	C	B	C
	C	B	C	A	C	C	B	C	B	C	D	A	C	B	A
	C	D	B	A	A	C	A	A	B	B	C	A	C	B	C
	C	D	C	A	A	C	A	C	B	A	C	A	C	B	B
	C	D	C	A	A	C	A	C	B	B	D	A	C	B	B
	C	B	C	B	A	B	A	A	B	B	D	A	C	B	B
	C	C	D	A	A	C	B	D	B	A	D	A	C	B	D
	C	D	C	A	A	C	A	B	B	A	D	A	C	B	B
	C	D	C	A	A	C	A	C	B	A	C	A	D	C	B
	C	D	C	A	A	C	A	C	B	A	C	A	C	B	B
	C	B	C	A	C	C	A	C	B	A	D	A	C	B	C
	C	D	C	A	A	C	A	C	B	B	B	A	C	C	B
	C	D	C	A	A	C	A	A	D	B	C	A	C	B	B
	C	B		A	A	C	B	C	B	C	C	A	C	D	B
	C	B	C	A	A	AC	A	C	B	A	C	A	C	B	B
	C	B	B	B	C	C	B	B	B	A	D	A	C	A	B

	PRUEBA DE SALIDA														
GRUPO CONTROL	C	D	C	A	A	C	A	C	A	B	C	A	C	B	B
	C	D	C	A	A	C	B	A	B	A	C	A	C	A	D
	C	D	C	A	A	C	B	C	B	C	C	A	C	A	A
	C	D	C	A	A	C	A	C	B	B	C	A	D	B	C
	C	D	C	C	A	C	B	A	D	C	C	A	C	B	A
	C	D	C	A	A	B	B	A	B	C	C	A	A	D	C
	C	D	D	B	A	B	B	C	D	B	D	A	C	B	B
	C	D	C	A	A	C	B	A	B	C	C	A	C		C
	C	D	C	D	A	D	A	B	B	C		B	B	B	C
	C	D	C	A	A	C	A	D	B	C	C	A	C	C	D
	C	D	C	A	A	C	B	C	C	A	C	A	C	B	A
	C	B	C	B	A	C	A	B	C	C	D	A	A	B	D
	C	B	B	A	A	C	B	C	B	C	D	A	C	C	B
	C	D	C	A	A	AC	A	C	B	C	C	A	C	B	B
	C	D	C	A	A	C	C	A	D	C		A	C	D	B
	C	B	C	B	A	C	B	C	B	A	D	A	C	B	B
	D	C	C	B	A	D	C	B	D	C	D	A	B	C	A
	C	C	C	A	A	B	A	C	D	C	D	A	C	B	C
	C	C	C	C	A	C	A	C	B	B	C	A	C	B	D
	C	C	D	A	A	C	B	C	B	C	D	B	C	B	B
	C	D		A	D	C	A	C	A	C	C	A	C	D	D

De igual forma que con la prueba de entrada se realizó un análisis mediante el programa EXCEL de los distractores en cada uno de los ítems de la prueba, los resultados de dicho análisis se muestran a continuación.

PREGUANTA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RESPUETA	C	D	C	A	A	C	A	C	B	A	C	A	C	B	B
A	0	0	0	29	34	0	22	8	2	11	0	36	2	3	5
B	0	9	4	6	0	4	14	7	28	9	1	2	2	25	19
C	37	5	28	2	3	30	2	21	2	18	19	0	32	5	8
D	1	24	4	1	1	2	0	2	6	0	16	0	2	4	6
EN BLANCO	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0
TOTAL	38	38	38	38	38	36	38	38	38	38	38	38	38	38	38
TOTAL CONTESTADAS	38	38	36	38	38	36	38	38	38	38	36	38	38	37	38
TOTAL ACERTADAS	37	24	28	29	34	30	22	21	28	11	19	36	32	25	19

Mediante los resultados encontrados podemos concluir que:

1. Los ítems 4,8,9,11,13,14 y 15 demuestran un buen planteamiento tanto en la respuesta correcta, ya que es la que tiene mayor porcentaje en la respuestas dadas como en los distractores porque aun cuando la respuesta acertada fue la que mas escogieron los estudiantes los demás distractores también fueron elegidos.

2. Los ítems 1,2,3,5,6,7 y 12 demuestran que los estudiantes eligieron la respuesta correcta pero tienen deficiencias en alguno de los distractores ya que no fue elegido por ninguno de los estudiantes.

3. Los ítems 10 y 11 al contrario de los planteados anteriormente posee deficiencias no el planteamiento de los distractores sino en la elección correcta ya que esta no fue elegida por la mayoría de los estudiantes sino que fue un distractor el que obtuvo el mayor porcentaje.

Análisis de ítems

Indicie de Dificultad: Al igual que con la prueba de entrada se procede a observar el análisis del índice de dificultad en cada uno de los ítems obteniendo los siguientes resultados.

N. ítem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Dificultad	0,97	0,63	0,78	0,76	0,89	0,83	0,58	0,55	0,74	0,29	0,53	0,95	0,84	0,68	0,50
	MF	**F**	**MF**	**MF**	**MF**	**MF**	**F**	**F**	**N**	**D**	**N**	**MF**	**MF**	**F**	**N**

Según lo observado en el índice de dificultad presentado por los ítem en la prueba de salida se puede ver que los ítems 1,3,4,5,6,12,13 se ubicaron en el 52% como Muy fáciles, los ítems 2,7,8,14, están en el 20% como fáciles, los ítems 9,15 el 27% como normales y el ítem 10 en el 7% como difíciles.

Indicie de Discriminación:

N. ítem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Discriminación	0,247	0,74	0,25	0,99	0,25	0,25	0,49	0,99	0,25	0,25	0,99	0,25	0,74	0,49	0,74

Se puede observar según el análisis del índice de discriminación de cada ítem que la mayor parte de ellos tienen un valor mayor al 0,3, los cuatro ítem que se encuentran bajo este valor son los ítems 1, 3, 5, 6, 9 y 12 no se encuentran muy separados de los estimando, por tal razón son tenidos en cuenta durante la investigación.

Indicie de Homogeneidad:

De igual forma que con la prueba de entrada se procede a realizar los resultados de los ítems para observar el índice de homogeneidad encontrado.

N. ítem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Homogeneidad	0,511	0,42	0,26	0,56	0,2	0,36	0,48	0,44	0,33	0,38	0,45	0,24	0,38	0,28	0,39

Al igual que con la prueba de entrada se procede a realizar el análisis de cada uno de los ítems, observado en los resultados obtenidos que los ítems 1, 2, 4, 7, 8,10,13 y 15 se encuentran sobre el valor 0,39 requerido por lo cual se consideran como ítems buenos y que deben ser conservados en el test, los demás ítems aun cuando no logran estas sobre el valor requerido no están tan lejos del mismo por lo cual se considera que pueden ser utilizados aun cuando se debe mejorar el planteamiento de los mismos.

Análisis Estadístico:

A continuación se analizarán los datos obtenidos tanto en la prueba de entrada como en la prueba de salida en cada uno de los dos grupos (Experimental, Control). Se aplicarán técnicas de estadística inferencial para caracterizar el estado inicial de los dos grupos, al final se compararán los puntajes obtenidos en la prueba de salida de ambos grupos.

Prueba de Entrada

Para obtener conclusiones a partir de los datos, en la investigación, se empezará analizando los datos de la prueba de entrada del grupo control y el grupo experimental para ello se siguen los siguientes pasos.

1. Prueba de normalidad:

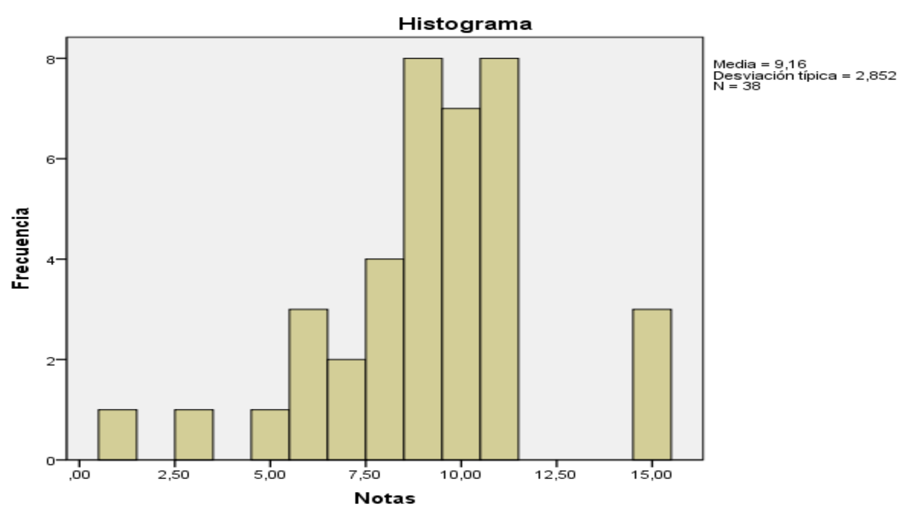
Lo primero que se realiza con los datos obtenidos en la prueba de entrada tanto en el grupo control como en el experimental es una prueba que nos permite determinar el comportamiento de los mismos, para efectos de esta investigación se realizará una prueba de normalidad mediante el uso del software estadístico SPSS. Los resultados de la misma se muestran a continuación.

Pruebas de normalidad

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Notas	,180	38	,003	,927	38	,016

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 4



Ya que la cantidad de datos obtenidos en la investigación es inferior a 50 se aplico la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk, el nivel de significancia con el que se trabajo fue $\alpha = 0{,}05$. Las dos hipótesis para la prueba de normalidad.

H_0: $Los\ datos\ se\ distribuyen\ de\ forma\ normal.$

H_1: $Los\ datos\ no\ se\ distribuyen\ de\ forma\ normal.$

Se debe recordar que mediante los resultados obtenidos no se rechaza la hipótesis nula si el valor obtenido del α es superior al 0,05 dado, de lo contrario se rechaza la hipótesis nula. Al observar los resultados obtenidos en la prueba de normalidad encontramos que el valor α dado por la prueba de Shapiro-Wilk es $\alpha = 0{,}016$ siendo este valor menor que el nivel de significancia dado, luego se rechazar la hipótesis nula y se toma la alternativa, lo cual nos indica que los datos no se distribuyen de forma normal.

Ya que el tamaño de la muestra es muy pequeño y los datos no se distribuyen de forma normal se procede a realizar "*un contraste de comparación de tendencia central"* por medio de la comparación de las medianas, dado que las dos poblaciones son independientes se procede a realizar la prueba U de Mann-Withnney, es decir se compararan ***las Medianas*** de las dos poblaciones y se trabajará sobre los rangos de orden.
Se procede a plantear las dos hipótesis.

H_0: $Las\ Medianas\ de\ los\ dos\ grupos\ son\ iguales.$

H_1: $Las\ Medianas\ de\ los\ dos\ grupos\ son\ diferentes.$

En la aplicación de esta prueba debemos tener en cuenta el valor U de la misma así

$$U = Mín\ (\ U_1, U_2)$$

$$U_1 = \ n_1 \cdot \ n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \ R_1$$

$$U_2 = \ n_1 \cdot \ n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - \ R_2$$

Siendo

$n_1 = Tamaño\ de\ la\ primera\ muestra$

$n_2 = Tamaño\ de\ la\ segunda\ muestra$

$R_1 = Suma\ rangos\ de\ la\ primera\ muestra$

$R_2 = Suma\ rangos\ de\ la\ segunda\ muestra$

Hallado este valor U procedemos a encontrar el valor Z necesario para el “rechazo” o “no rechazo” de la hipótesis nula, siendo

$$Z = \frac{U - (\frac{n_1 n_2}{2})}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

Se debe recordar que si $Z \leq \ Z_\alpha$ no se rechaza la hipótesis nula, y si $Z > \ Z_\alpha$ se rechaza la hipótesis nula y se toma la alternativa ($Z_\alpha = 1{,}96$). A continuación se muestra el resultado obtenido en el cálculo del valor Z, por medio del programa estadístico SPSS.

Prueba de Mann-Whitney

Rangos

	Grupo de estudio	N	Rango promedio	Suma de rangos
Número de respuestas acertadas	Contol	21	18,05	379,00
	Experimental	17	21,29	362,00
	Total	38		

Estadísticos de contraste[b]

	Número de respuestas acertadas
U de Mann-Whitney	148,000
W de Wilcoxon	379,000
Z	-,908
Sig. asintót. (bilateral)	,364
Sig. exacta [2*(Sig. unilateral)]	,383[a]

a. No corregidos para los empates.
b. Variable de agrupación: Grupo de estudio

Al observar el valor Z encontrado, se puede ver que es $Z = -0{,}908$ donde $Z \leq Z_\alpha$ razón por lo cual "*No se rechaza*" la hipótesis nula, lo que nos indica que las Medianas tanto del grupo control como del grupo Experimental en la prueba de entrada son iguales, como lo muestra el siguiente grafico de Caja y bigotes obtenido en el programa.

Prueba de Salida

En el análisis de los datos obtenidos en la prueba de salida se procede de igual forma que con la prueba de entrada, ya que el tamaño de la muestra es muy pequeña se procederá de una vez con el análisis de la U de Mann-Withnney para la comparación de las medianas, el planteamiento de las hipótesis es el mismo.

H_0: $Las\ \ Medianas\ de\ los\ dos\ grupos\ son\ iguales.$

H_1: $Las\ \ Medianas\ de\ los\ dos\ grupos\ son\ diferentes.$

Al igual que con la prueba de entrada se realizan estos procedimientos mediante el programa estadístico SPSS a continuación se muestra el resultado obtenido en el cálculo del valor Z.

Prueba de Mann-Whitney

Rangos

	Grupo de estudio	N	Rango promedio	Suma de rangos
Número de respuestas acertadas	Contol	21	16,07	337,50
	Experimental	17	23,74	403,50
	Total	38		

Estadísticos de contraste[b]

	Número de respuestas acertadas
U de Mann-Whitney	106,500
W de Wilcoxon	337,500
Z	-2,144
Sig. asintót. (bilateral)	,032
Sig. exacta [2*(Sig. unilateral)]	,033[a]

a. No corregidos para los empates.
b. Variable de agrupación: Grupo de estudio

Al observar el valor Z encontrado, se puede ver que es $Z = -2{,}144$ donde $Z > Z\alpha$ (ya que es una prueba estadística de dos colas el valor negativo no tiene importancia) razón por lo cual "*se rechaza*" la hipótesis nula, lo que nos indica que toma la hipótesis alternativa que plantea que las Medianas del grupo control y del grupo Experimental son diferentes.

El siguiente paso es determinar cuál es el grupo que posee mayor valor en su mediana, para ello procedemos a realizar análisis de estadísticos descriptivos mediante el programa estadístico SPSS obteniendo los siguientes resultados.

Grupo de estudio

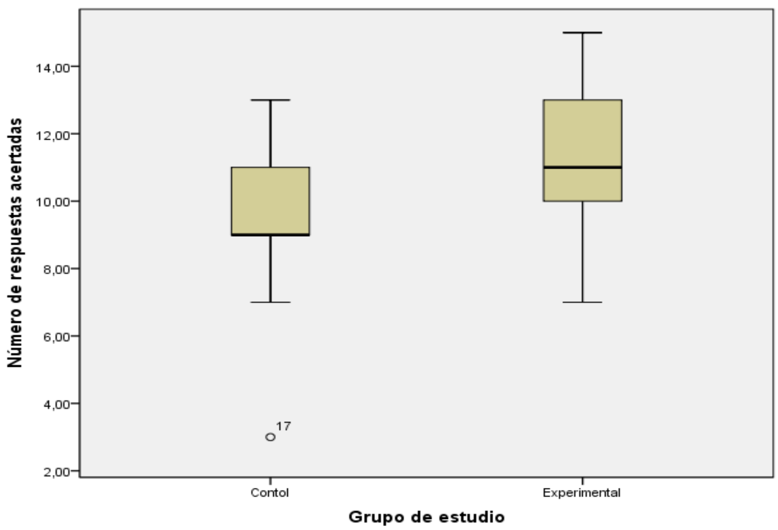
Resumen del procesamiento de los casos

		Casos					
		Válidos		Perdidos		Total	
	Grupo de estudio	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Número de respuestas acertadas	Contol	21	100,0%	0	,0%	21	100,0%
	Experimental	17	100,0%	0	,0%	17	100,0%

Descriptivos

	Grupo de estudio			Estadístico	Error típ.
Número de respuestas acertadas	Contol	Media		9,6190	,50932
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	8,5566	
			Límite superior	10,6815	
		Media recortada al 5%		9,7884	
		Mediana		9,0000	
		Varianza		5,448	
		Desv. típ.		2,33401	
		Mínimo		3,00	
		Máximo		13,00	
		Rango		10,00	
		Amplitud intercuartil		2,50	
		Asimetría		-,949	,501
		Curtosis		1,890	,972
	Experimental	Media		11,3529	,53510
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	10,2186	
			Límite superior	12,4873	
		Media recortada al 5%		11,3922	
		Mediana		11,0000	
		Varianza		4,868	
		Desv. típ.		2,20627	
		Mínimo		7,00	
		Máximo		15,00	
		Rango		8,00	
		Amplitud intercuartil		3,50	
		Asimetría		-,074	,550
		Curtosis		-,423	1,063

Como se puede observar en la tabla de resultados de estadísticos descriptivos, podemos ver que el valor de la Mediana en el grupo Control es de $Me = 9{,}00$, mientras que el valor de de la Mediana del grupo Experimental es de $Me = 11{,}00$, lo cual nos indica una diferencia positiva en los puntajes obtenidos en el grupo experimental con respecto a los obtenidos por el grupo control como lo indica el grafico.



CAPITULO 5

Conclusiones

Durante el proceso de la investigación se desarrollaron diversos procedimientos de los cuales se obtuvieron diversos resultados que nos permite realizar las siguientes conclusiones.

1. Como se ha descrito durante el desarrollo del proyecto la primera etapa que se realizo fue el desarrollo de talleres y tutoriales para la aplicación de la estrategia didáctica, después durante la situaciones acción y formulación se llevo a cabo la aplicación de dichos talleres tanto de forma escrita como mediante la utilización de los programas Winplot y wx- Máxima, por último se realizo un análisis de los resultados obtenidos tanto en la prueba de entrada como en la de salida para los dos grupos, todo lo anterior nos lleva al logro de los objetivos específicos que se habían planteado al inicio de la investigación y por tal razón nos permite concluir que se cumplió el objetivo general.

2. Como se puede observar en el análisis de los resultados en la prueba de salida se probo que las respuestas correctas dadas por los estudiantes del grupo experimental en comparación con los estudiantes del grupo control eran superiores, lo cual muestra que aun cuando en la prueba de entrada los dos grupos se encontraban equitativamente en la prueba de salida se observo una mejora en el grupo experimental, por tal razón se puede decir que si existe una asociación entre el aprendizaje del concepto de Espacio Vectorial y el planteamiento de una estrategia didáctica con el uso de herramientas computacionales como wx-Máxima, Wintplot en

estudiantes de primer semestre de ingeniería de la Universidad ECCI de Colombia, lo cual nos lleva a la verificación la hipótesis planteada en el inicio de la investigación.

3. Aun cuando en documento entregado como investigación no se muestran evidencias de cada una de las clases realizadas, se puede concluir que como investigadoras observamos que los estudiantes demuestran una gran empatía en el uso de las tecnologías para el desarrollo de las clases, así como la mejora de la autonomía frente a las mismas por medio de la Didáctica planteada y la socialización de cada uno de los temas con los compañeros, lo cual consideramos son conclusiones que se observan en la investigación aun cuando no estaban planteadas en sus inicios.

Aportes y Alcances de la Investigación

1. Con los programas matemáticos Winplot y wxMáxima permite que los estudiantes sean interactivos y autónomos en el proceso de aprendizaje, por tal motivo esta herramienta didáctica puede ser fuente de apoyo para los docentes que enseñan álgebra lineal en otras instituciones de educación superior del país.

2. Con el enfoque didáctico de Brouseau aplicado al grupo experimental se logró resultados favorables en lo que se refiere a la construcción del conocimiento por parte del estudiante, en esta caso el concepto de espacio vectorial.

Bibliografía

Patlán Rodríguez, M.A. (1999). *Propuesta didáctica el uso de la computadora en la enseñanza de la matemática para ingeniería.* Universidad Autónoma de Nuevo León, México D. F.

Cantoral, R. (2000). Teoria de Situaciones Didacticas; capitulo cuatro. En R. Cantoral, *Desarrollo del pensamiento matematico* (págs. 1-3). Trillas.

Ortega Pulido, P. (2002). Una estrategia didáctica para la enseñanza del álgebra lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE. *La Revista Complutense de Educación 13* (2), 674-675.

Milton, J.S. (2003). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias computacionales.* Ciudad de México, México: Ediciones Mc Graw-Hill.

Panizza, M. (2004). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas.* Recuperado de http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf.

Howard, A. (2006). *Introducción al álgebra lineal.* (3era ed). Ciudad de México, México: Ediciones Limusa.

Hernández T, N. J.(2007). *Analisis didactico de situaciones de aprendizaje a traves de un Sotfware tipo simulacion para enseñar vectores en tercera dimensión.* Merida.

Mosquera J., & Salcedo A. (2008). *Didáctica del Algebra Lineal y Probabilidad.* Universidad Nacional Abierta, Caracas, Venezuela.

Asuman, O., Trigueros, M., & Ku, D. (2008). *Comprensión de concepto de base en espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. Educación matemática. 20* (2), 65-89. Recuperado de http://wwwalyc.org/pdf/405/40512062004.pdf.red.

Betancourt, G. Y. (2009). *Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución del sistema de ecuaciones lineales en la educación superior.* Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional. México Distrito Federal.

Parraguez González, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto del espacio vectorial*. Instituto Politécnico Nacional, México, D. F.

León, J.G. (2009). *Propuesta didáctica de enseñanza para propiciar un aprendizaje significativo de los espacios vectoriales.* Universidad experimental de Guayana, Puerto Ordaz, República Bolivariana de Venezuela.

Ramírez Badillo, M. (2009). *Reseña" iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas" de Guy Brousseau. Educación matemática. 21* (2), 181-184. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40516672008.pdf.

Guy Brousseau- El padre de la didáctica matemática. (2009). *Revista Nova Escola* (ed. 219). Recuperado de http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/Brousseau.pdf.

Montoya, E., & Guzmán T. (2011) *Uso de Herramienta Web 2.0 en la enseñanza del álgebra lineal: una propuesta didáctica,* Congreso Internacional EDUTEC, Pachuca, Hidalgo, México.

Espacios vectoriales. (2011). Departamento de matemáticas, CCIR/ITESM. Recuperado de http://cb.mty.itesm.mx/ma1010/materiales/ma1010-03.pdf.

Sánchez, M.J. (2011). Historias de matemáticas Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones. *Revista "Pensamiento matemático"*(1), ISSN 2174-0410 Universidad politécnico de Madrid, España. Recuperado de la página http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/hamilton_y_el_descubrimiento_de_los_cuaterniones.pdf.

Gil, L.G., Calvo, I., & Gil, Y.B (2011). *El uso de TIC como medio para la enseñanza del álgebra lineal. XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Grossman, Stanley. I. (2012). *Algebra lineal.* (7ª ed). Ciudad de México, México: Ediciones Mc Graw-Hill.

Rosales Ordoñez, G.R. (2012). *Diseño e implementación de talleres para la enseñanza y aprendizaje del álgebra matricial y solución de sistemas de ecuaciones lineales con Scilab.* Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

Morales Estuardo, G.A (2012). *Estadística y probabilidades.* Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile. Recuperado de http://dme.ufro.cl/clinicamatematica/pdf/Estadistica%20y%20Probabilidad.pdf

Figueroa Vera, R.E. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas.* Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Espacios vectoriales. (s.f). I.Q.MGTVE. Recuperado de http://algebralineal.host22.com/Espacios%20Vectoriales/espaciosvectoriales2.html .

Sadovsky, P. (s.f). *La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática.* Recuperado de http://upvv.clavijero.edu.mx/cursos/desarrollo_del_pensamiento_matematico/programa/documentos/Patricia.pdf.

Probabilidad y Estadística. (s.f). Facultad de Ciencias Básicas - Departamento de matemáticas - Área de Estadística. Prueba de Hipótesis para la Media Poblacional. Recuperado de http://augusta.uao.edu.co/moodle/mod/resource/view.php?id=40246.

Rohen,V. (s.f). *Prueba de Hipótesis.* Recuperado de http://www.biostat.jhsph.edu/~lcollado/Courses/MEyAdDG/day2/Pruebas%20de%20Hip%C3%B3tesis.pdf.

(s.f). *Prueba para dos muestras independientes.* Recuperado de http://www.ub.edu/aplica_infor/spss/cap6-2.htm

ANEXOS

ANEXO 1

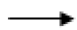
ESCUELA COLOMBIANA DE CARRERAS INDUSTRIALES
ECCI

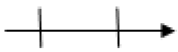
PRUEBA DE ENTRADA
ANEXO 1

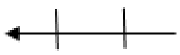
Nombre:______________________________

PREGUNTAS DE SELECCION MULTIPLE CON UNICA RESPUESTA- (TIPO I)

Con esta prueba se espera determinar el nivel que tiene usted para la asignatura de algebra lineal y así conocer el nivel del grupo.

1. Dado un vector $\vec{A}$,  entonces el vector $-\vec{A}$ es:

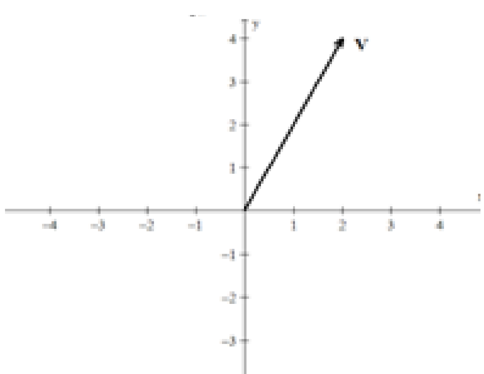
a. 

b. 

c. 

d. 

2. De acuerdo con la grafica el vector $\vec{V}$ representado es:



a. $\vec{V}$ (2,4)
b. $\vec{V}$ (4,2)
c. $\vec{V}$ (1,3)
d. $\vec{V}$ (4,4)

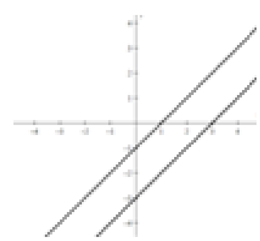
c. Todo segmento de recta dirigido en el espacio por el solamente tiene magnitud y dirección.

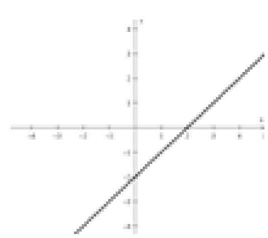
d. Es una curva dirigida en el espacio por el cual tiene Magnitud, Dirección y sentido.

5. Un concepto de sistema de ecuación seria:
a. Es aquella que involucra solamente sumas y restas de variables elevadas a la primera potencia.
b. Es la reunión de dos o más ecuaciones con dos ó más incógnitas.
c. Esta representa de la forma $y = mx + b$.
d. Son las que se obtienen una de la otra.

6. La solución de la siguiente ecuación lineal $x - y = 1$, $x + y = 3$ corresponde a una solución:
a. Solución única
b. No tiene solución
c. Soluciones infinitas
d. Solución impar.

7. Si se obtiene la siguiente ecuación $x - y = 2$ y $2x - 2y = 4$. Luego la grafica representada pertenece a la solución.

a. 

b. 

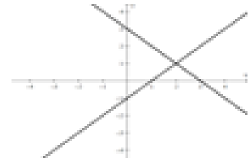
3. Sean los vectores *U= (2,3)* y *V= (-5,1)* la suma de vector *U+V* es:

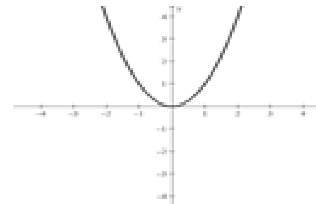
a. (3,4)
b. (-3,4)
c. (7,2)
d. (–7,4)

4. Un concepto de vector puede ser el siguiente:

a. Todo segmento de recta dirigido en el espacio por el cual cumple con las siguientes características. Magnitud, Dirección y Sentido.

b. Es un escalar que cumple con las siguientes características. Magnitud, Dirección y Sentido.

c. 

d. 

8. Un determinante A de $m \times n$ se expresa de la forma det A $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = a.b - c.d. Una de las propiedades de los determinantes es: Si A tiene una fila o columna de ceros entonces podemos afirmar que:

a. El determinante del producto es el producto de sus determinantes.
b. El determinante de A es siempre un impar.
c. El determinante de A es diferente de cero.
d. El determinante de A sea igual a cero.

9. Si tenemos el determinante 3×3 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ el cálculo del determinante será:

a. -57
b. 68
c. -69
d. 72

10. Sean las matrices A y B,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Entonces A+B seria:

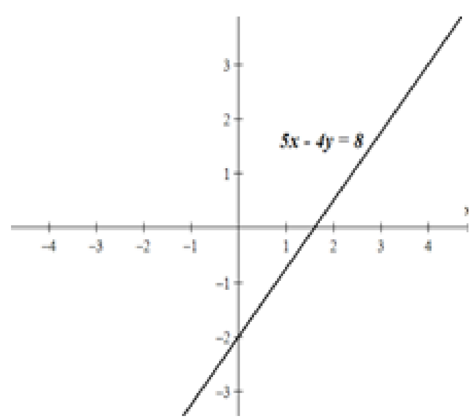
a. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

12. Se tiene la siguiente ecuación simultánea, efectuando la respectiva solución por los diferentes métodos, el valor de las incógnitas son:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

a. $x = 2,\ y = 3$
b. $x = 1,\ y = -\frac{1}{2}$
c. $x = -1,\ y = 2$
d. $x = \frac{2}{3},\ y = -4$

13. Al representar gráficamente la ecuación $5x - 4y = 8$, como se muestra en la siguiente gráfica, el despeje de la incógnita "*y*" sería:



a. $y = \frac{2}{4}x + 1$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

11. Sea la matriz B como se muestra a continuación y una constante C = 1/2, entonces el producto B.C; tiene como resultado:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

b. $y = -\frac{}{4}x - 2$

c. $y = \frac{-3}{7}x - 5$

d. $y = \frac{-1}{2}x - 3$

14. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + y = 11 \\ x + \frac{1}{2}y = 7 \end{cases}$$

Su solución es:

a. $x = -2,\ y = -1$

b. $x = 3,\ y = -4$

c. $x = 6,\ y = 2$

d. $x = -4,\ y = 3$

15. Si tenemos el vector $\overrightarrow{V} = (-3{,}6)$ y al calcular $\frac{1}{2}\overrightarrow{V}$ tenemos que el resultado es:

a. $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$

b. $\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right)$

c. $(-4, 6)$

d. $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

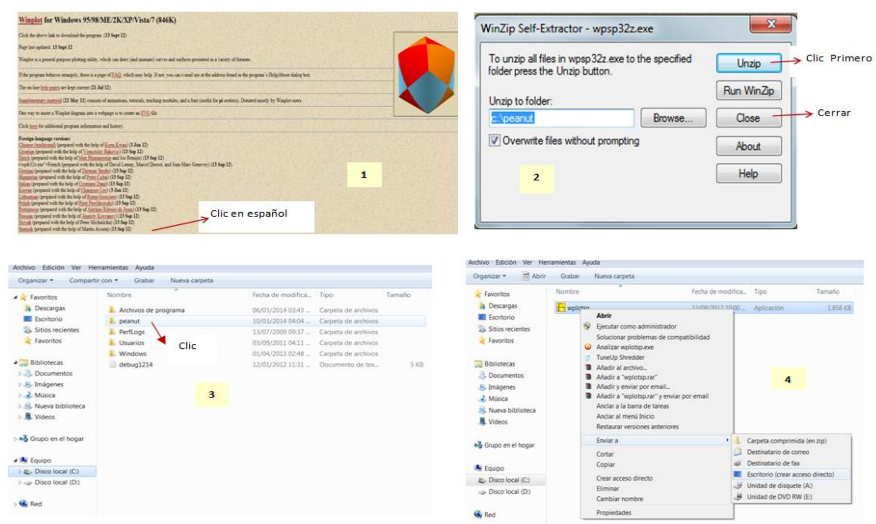
ANEXO 2

Tutorial WINPLOT

Para descargar winplot, podemos ingresar a la siguiente página

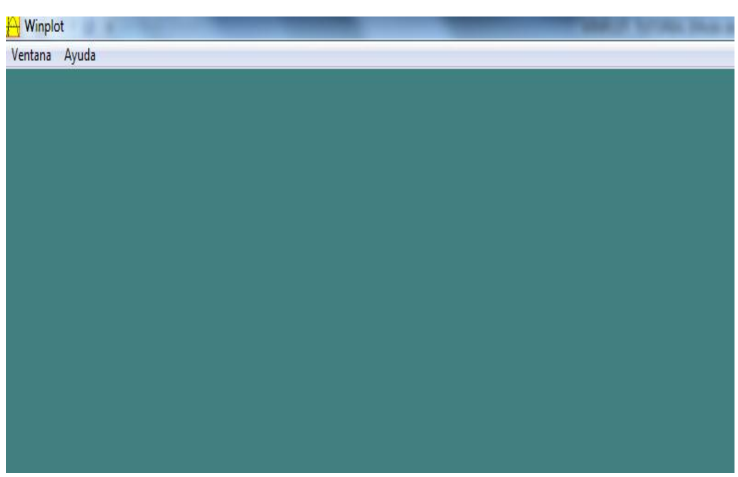
http://www.softonic.com/s/winplot/gratis-espanol o también http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Y efectuar los siguientes pasos para su respecta descarga como se ilustra a continuación en el recuadro.



1. Presentación del programa

Al abrir por primera vez el programa aparece la siguiente pantalla



2. Exposición de los iconos del programa winplot

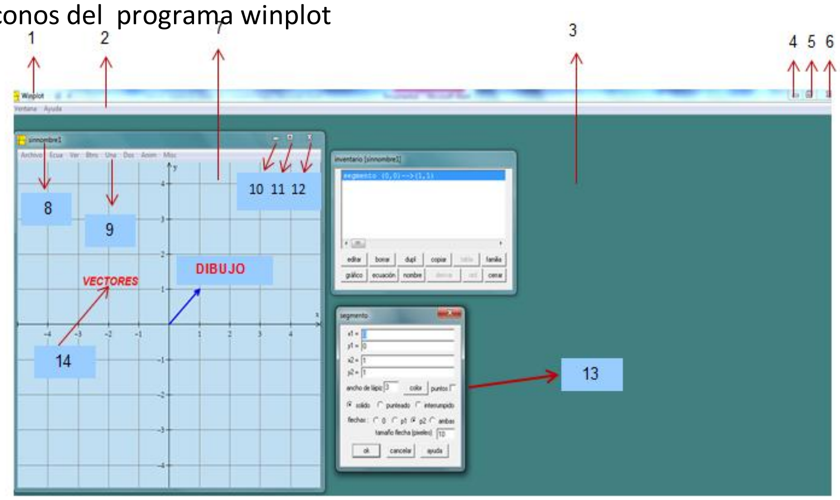
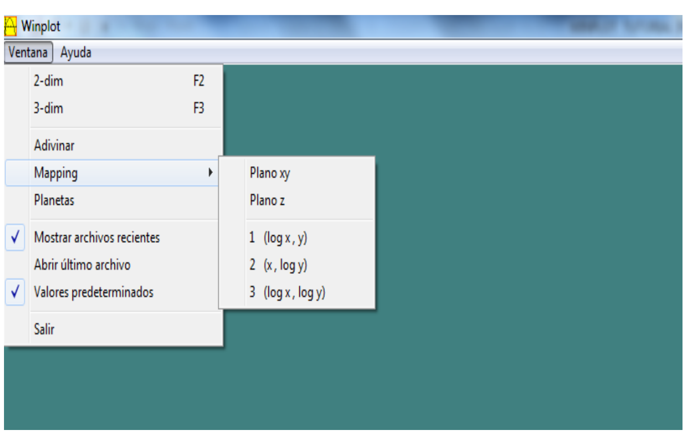


Figura 1.

1. Barra de título principal
2. Barra de menú principal
3. Ventana principal
4. Botón para minimizar aplicación
5. Botón para maximizar aplicación
6. Botón para cerrar aplicación
7. Ventana de trabajo
8. Barra de título de trabajo
9. Barras de menú de hoja de trabajo
10. Botón para minimizar la hoja de trabajo
11. Botón para maximizar la hoja de trabajo
12. Botón para cerrar la hoja de trabajo
13. Ventana para introducir la información
14. Edición de texto.

3. Encontramos dos menús: ventana y ayuda

Hacemos clic en el botón izquierdo del mouse en ventana y encontramos:



2-dim: plano en dos dimensiones

3-dim: Plano en tres dimensiones

Adivinar: función dada por el programa, la cual puede ser cambiada según se desee.

Mapping: Da el dominio y rango de la función

Planetas: Dibuja curvas

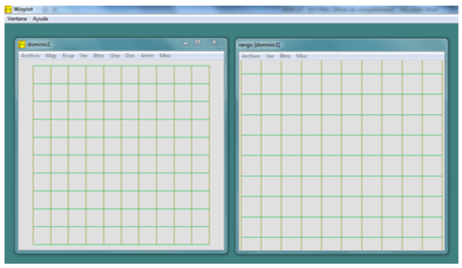
Mostar archivos recientes

Abrir último archivo

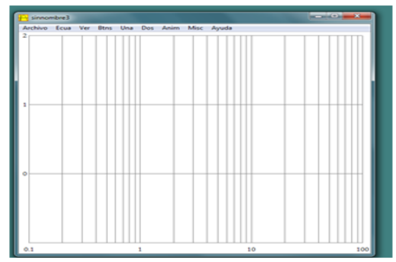
Valores predeterminados

Salir

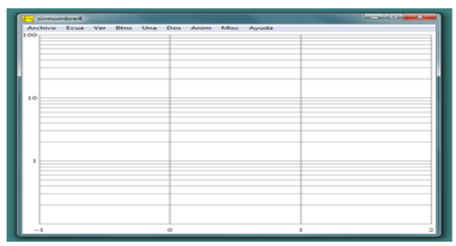
En el comando Mapping presenta diferentes comandos como se ilustra en la figura



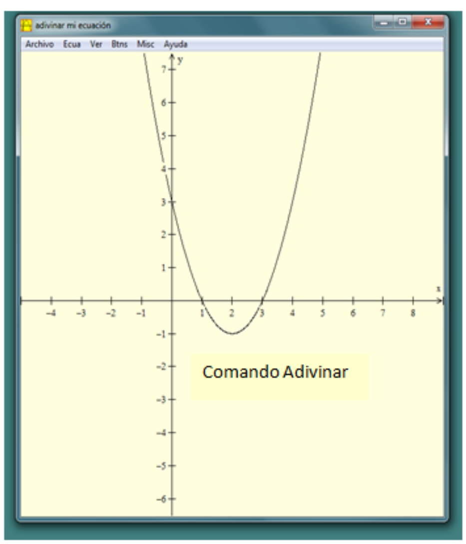
Plano x y,
Plano z

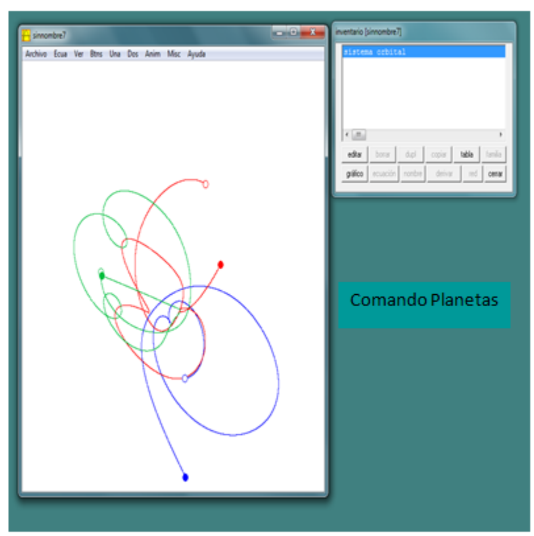


(log x y)

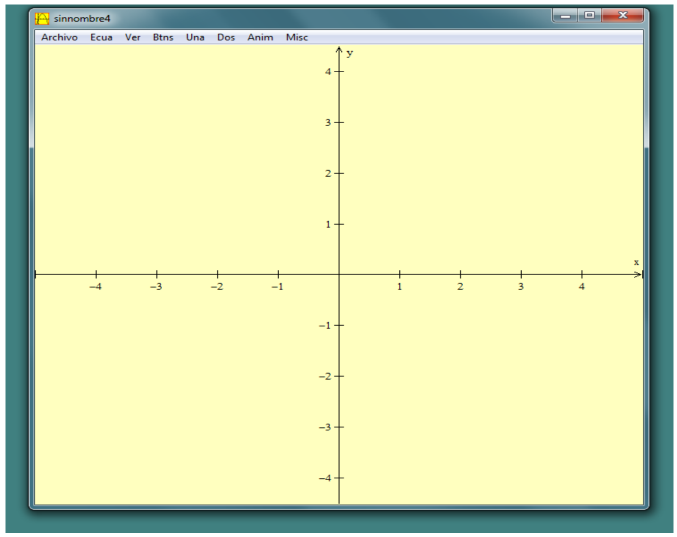


(log x, log y)



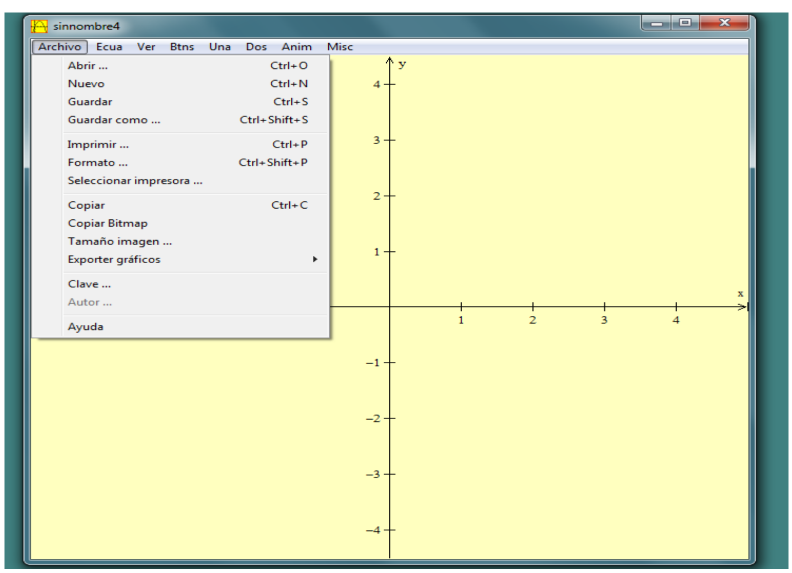


Damos click en 2-dim que es la parte que usaremos, de inmediato aparece la pantalla 2- dime

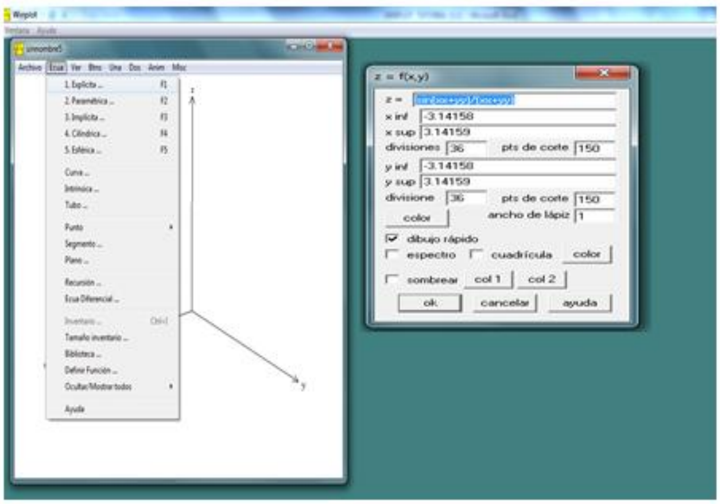


Vemos que se despliega un bloque de menús como son: Archivo, Ecuaciones, Ver, Botones, Una, Dos, Animación y Miscelánea.

Al activar Archivo obtenemos el siguiente esquema. De ahí se tienen las siguientes funciones: Abrir, Nuevo, Guardar, Guardar como, Imprimir, Formato. En el formato con click izquierdo se obtiene la siguiente presentación

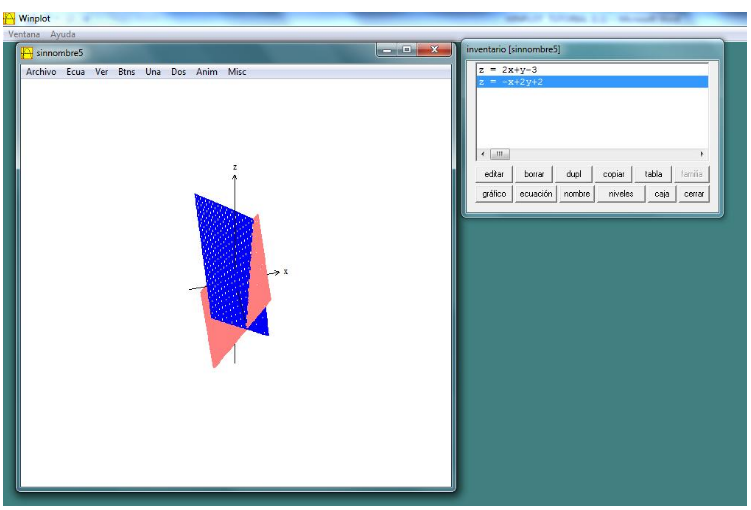


Ahora también el programa ofrece presenta un icono para trabajar en tres dimensiones, luego se da click en 3-dim, para dibujar planos.

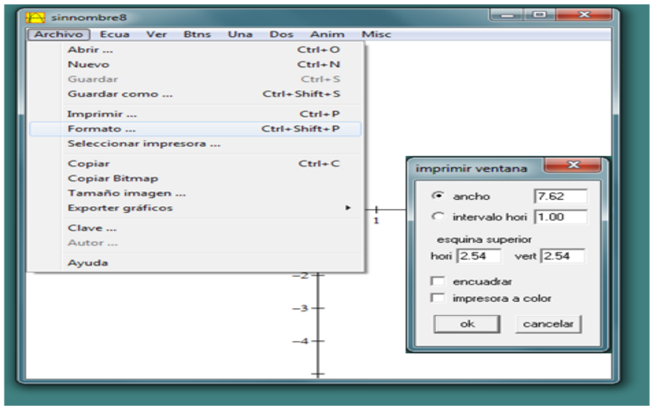


3-dim: Plano en tres dimensiones

Para dibujar un plano en winplot se debe ir a ecuaciones y luego en explicita….. click, y en seguida aparecerá un recuadro en el cual solicita completar algunos datos.



Representación gráfica de dos planos en tres dimensiones



Imprimir ventana: nos da opciones para desarrollar nuestra impresión, así:

Intervalo horizontal: Genera la imagen de acuerdo al tamaño de la hoja para imprimir (en carta no pasa de 21 cm)

Esquina superior: posee dos botones horizontal, vertical el cual nos indica el valor horizontal y vertical de la impresión.

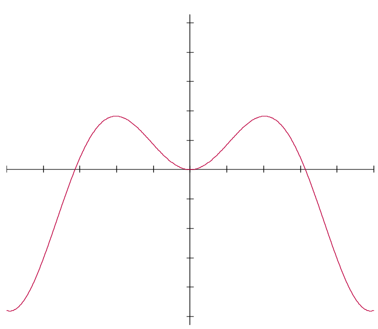
Frase imagen: nos indica el color alrededor de la imagen

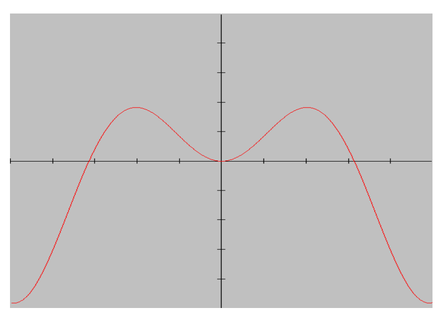
Impresora a color: Color de la imagen.

Select printer: muestra el diseño de página a imprimir.

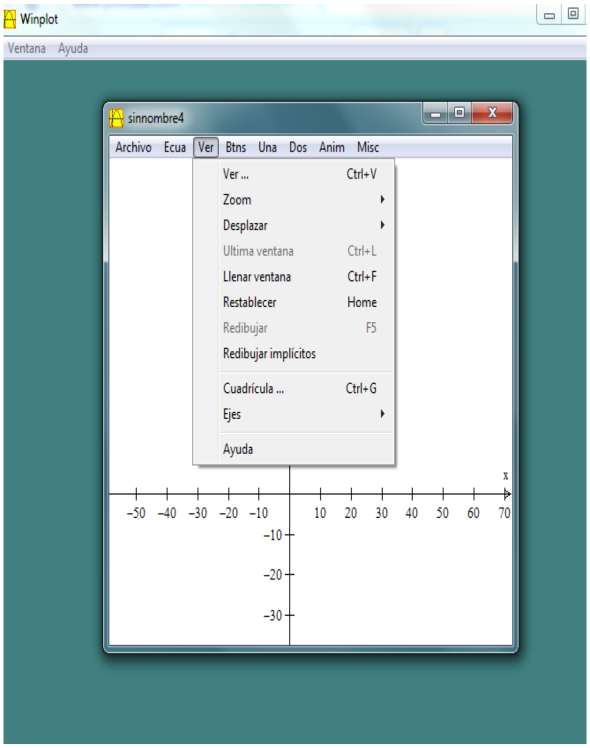
Copitoclipboard: Nos permite copiar la imagen (Ctrl C)

With back color: Copia la imagen con el color de fondo de la pantalla activado





Sin with back color **Con with back color**



Ver

En este icono podemos encontrar las opciones que se nos presentan para la imagen del plano cartesiano como lo deseamos.

Tenemos algunos comandos que explicaremos más adelante y otro de los cuales daremos la información de inmediato.

Última ventana: nos permite observar nuestra última gráfica.

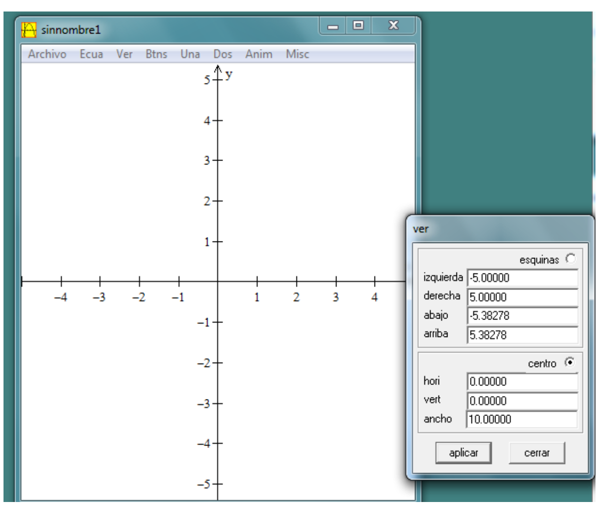
Llenar ventana: nos permite observar la gráfica realizada con el mayor zoom posible.

Restablecer: Realiza la gráfica del plano cartesiano de la forma inicial.

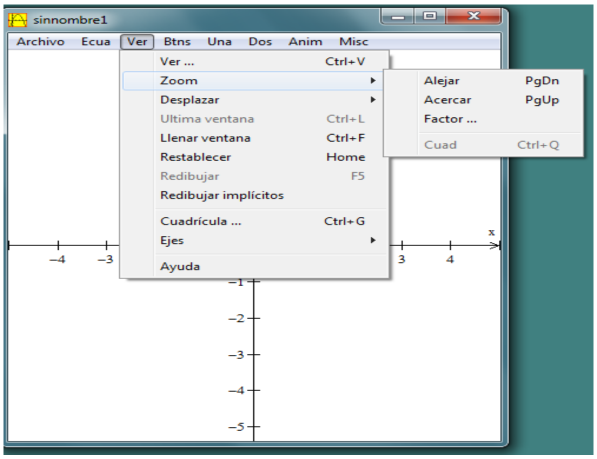
Redibujar:

Redibujar implícitos:

*Ayuda***:** Esta opción nos indica que significa cada uno de los comandos del menú y su utilidad.



Ver: Nos indica como deseamos que se nos presente el plano cartesiano.



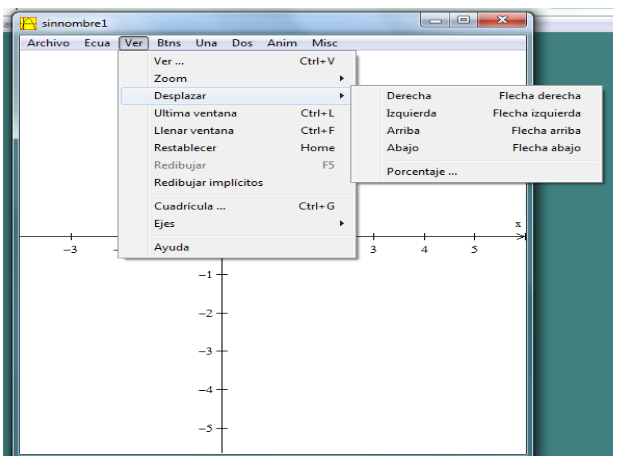
Zoom: nos muestra como agrandar o encoger la imagen que deseamos ver.

Observamos que podemos utilizar las teclas

PgDn: para alejar la imagen.

PgUp: para acercarla.

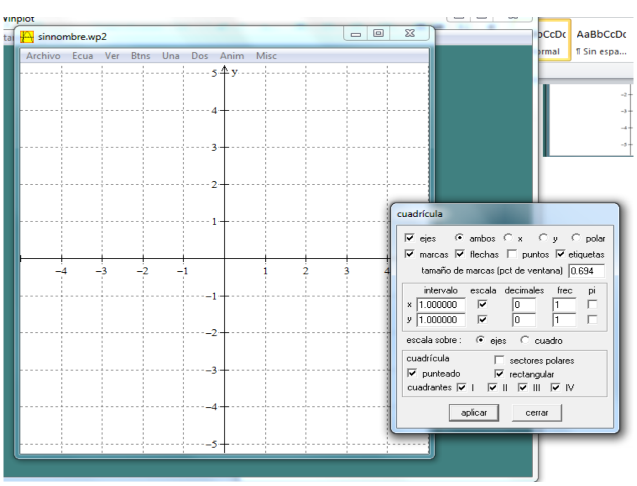
Factor: nos indica el valor de aumento o disminución.



Desplazar: nos muestra cómo podemos desplazar nuestro plano cartesiano según como queramos ver la gráf1ica.

Observamos que podemos utilizar las teclas de dirección si deseamos que este vaya hacia arriba, abajo, derecha o izquierda.

Porcentaje: nos dice en qué valor de desplazamiento lo deseamos.

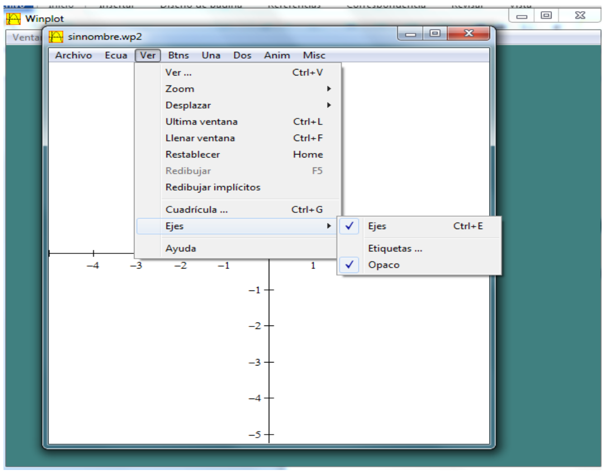


Cuadricula: Nos muestra la cuadricula en el plano cartesiano según la deseemos.

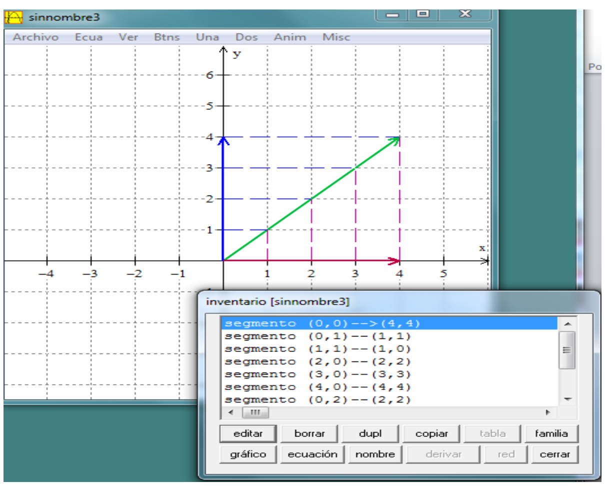
Podemos darle diversas opciones como:

Ejes, según el eje sobre el cual deseamos la cuadricula y en que coordenadas.

El valor de los intervalos, la escala en que sector la deseamos, el tipo de cuadricula si polar o rectangular, y el cuadrante en el que deseamos que sea graficada.



Ejes: Nos muestra los ejes el plano cartesiano o no según lo deseemos, nos indica las etiquetas según queramos llamar cada eje.

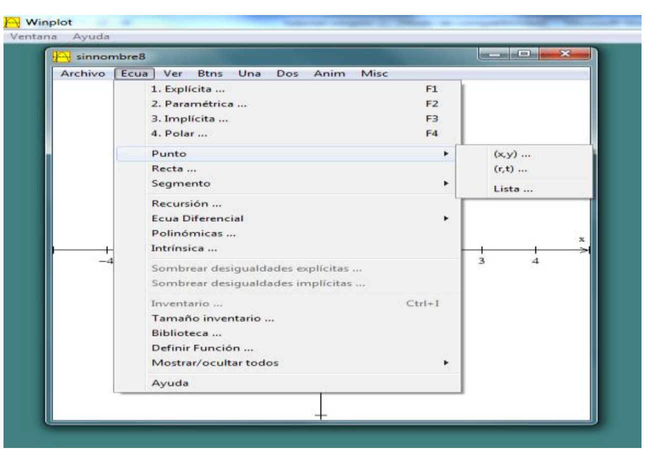


PROYECCION DE UN VECTOR:

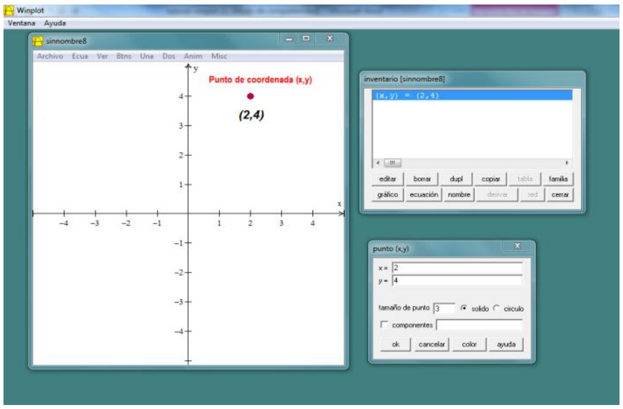
- Graficamos desde el origen el vector (4,4)
- Aplicamos cuadricula punteada.
- Luego tomamos puntos determinados de nuestro vector (0,0),(1,1),(2,2)(3,3) y vemos cada una de las proyecciones de estos puntos sobre los ejes, es decir por ejemplo para el punto (1,1) su proyección sobre el eje x seria el punto (1,0) ya que se proyecta sobre este eje luego su desplazamiento en y será igual a cero.

  De igual forma con los demás puntos.

1. **CONTRUCCION DE GRAFICAS**

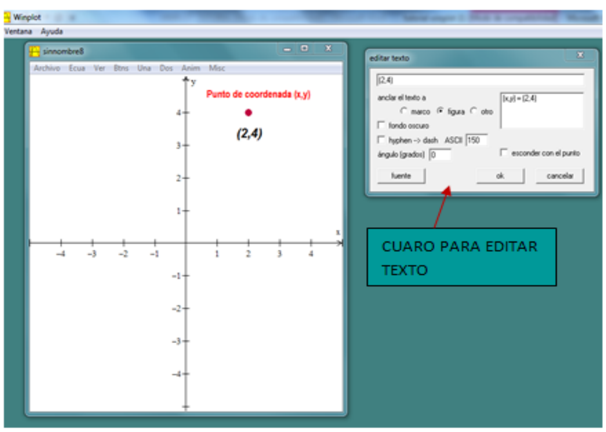


2. 1 Ubicación de una coordenada en el plano XY, dentro del cuadro de Winplot, despliega el menú Ecua, selecciona la opción punto y posteriormente coordenadas x,y.(ver figura 2.1)



Una vez introducido cada dato x e y en el cuadro de edición pulsa Ok y aparecerá en el plano de la hoja de trabajo y la ventana para introducir la información (figura 2.1.1)

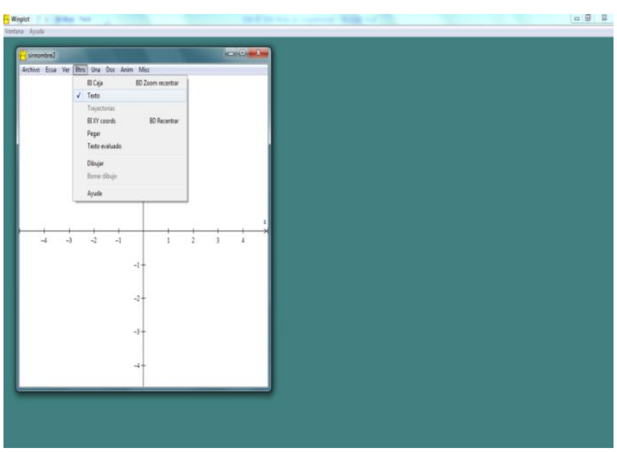
FIGURA2.1.1



Como se observa a continuación la ubicación del punto en la gráfica, el punto es el elemento base de la geometría, porque con el determinamos la recta y los planos. Y la ventana de edición de texto. (Ver figura 2.1.2)

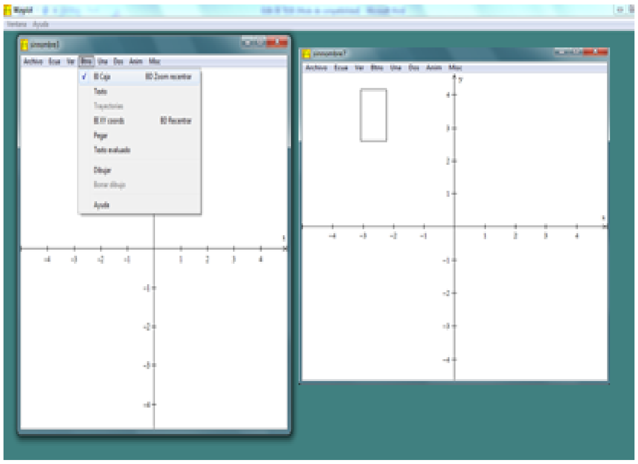
FIGURA 2.1.2

VENTANA DE BTNS



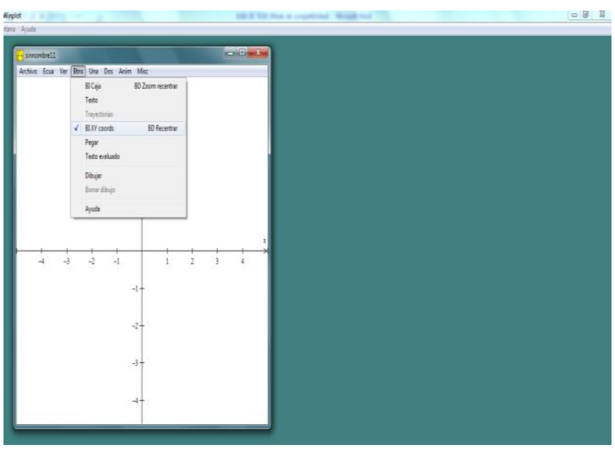
En la ventana Botones encontramos unos iconos como se ilustra en el diagrama. En texto aparece una ventana de edición de texto donde escribimos el párrafo, la fuente es la contextura de la escritura como son el estilo de fuente, tamaño de la letra, color, damos clic y aparece el texto como se ilustra en la figura (2.1.3)

FIGURA 2.1.3



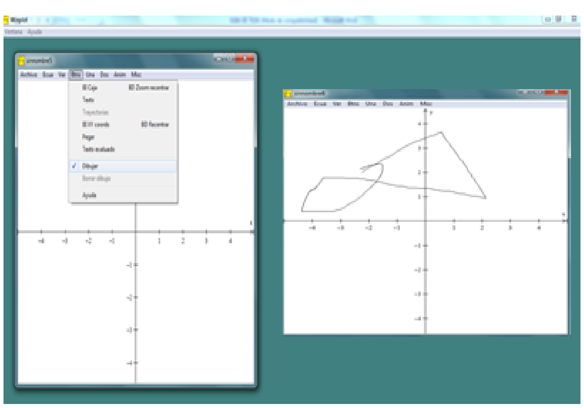
Otro icono que encontramos en Btns es BI Caja, con el botón izquierdo arrastramos un rectángulo dentro del marco y este desaparece (figura 2.1.4)

FIGURA 2.1.4



EL Boton BIXY Coods BD Recentar es botón derecho sobre cualquier punto del plano y el tamaño del esquema se reducirá como se ilustra en el diagrama. (Figura 2.1.5)

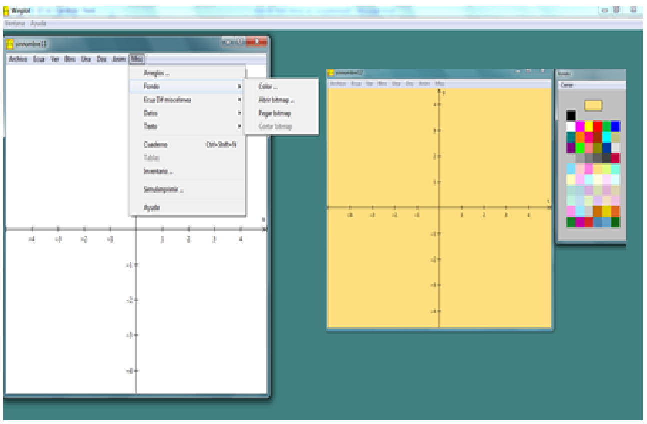
FIGURA 2.1.5



- Con el botón izquierdo clic en dibujar,
- dibujamos cualquier figura (Figura2.1.6)

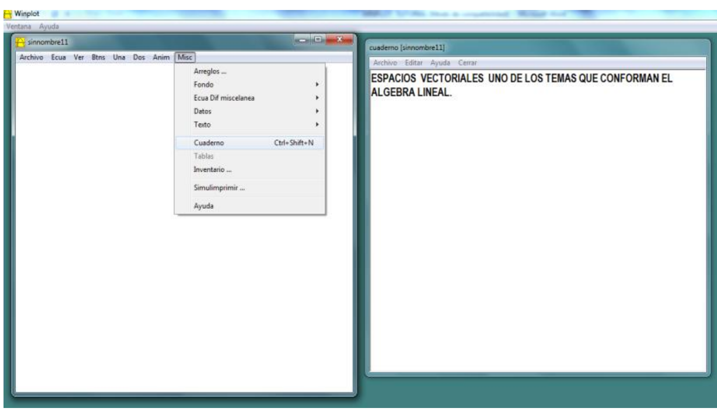
FIGURA 2.1.6

BOTON MISC



Abrimos la ventana MISC y
ɪntramos el icono fondo y nos
enta una variedad d colores para
ndo dela ventana de trabajo
ʼa (Figura2.1.7)

FIGURA 2.1.7



Abrimos la ventana MISC y
ıtramos el icono cuaderno y
una ventana donde podemos
ɔir un texto figura (Figura2.1.8)

FIGURA 2.1.8

TUTORIAL WX-MAXIMA

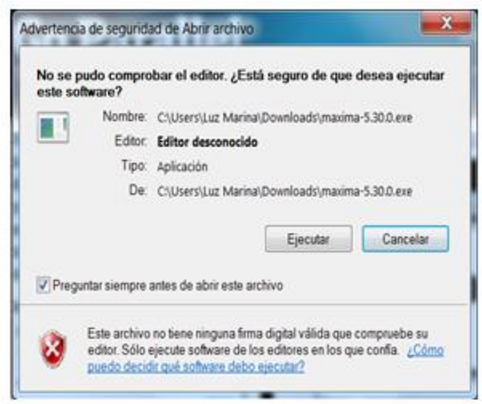
ESCUELA COLOMBIANA DE CARRERAS INDUSTRIALES
ECCI

ESPACIO VECTORIAL
TUTORIAL

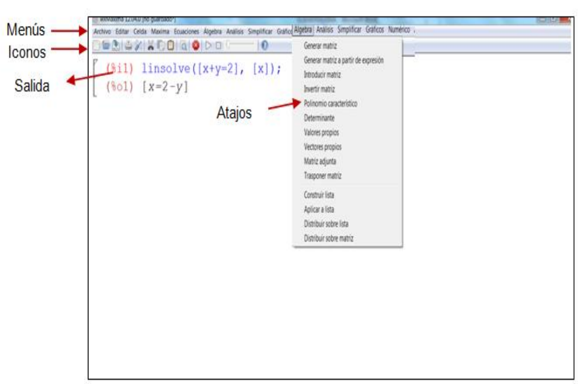
Para instalar wxMaxima se puede ingresar a las siguientes páginas

http://andrejv.github.io/wxmaxima/help.html
http://www.softonic.com/s/wxmaxima

Y efectuar los siguientes pasos para su respectiva descarga como se ilustra a continuación en el recuadro.



Click en el comando casa y aparece una nueva ventana y se descarga en (Ventana: wxMaxima 5.30.0); aquí se oprime y se espera un momento para descargar y de nuevo aparece otra pequeña ventana y después click en ejecutar. Y a continuación se indican una serie de pasos en los que usted deberá ir ejecutando cuando el programa se lo señale y así seguir el debido proceso hasta quedar instalado por completo el programa para trabajar.



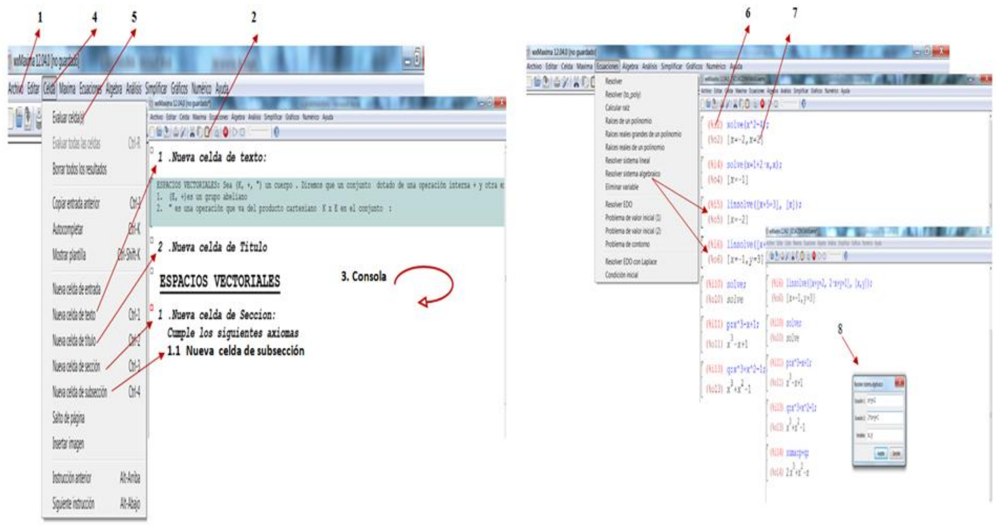
Presentación general del software matemático wxMaxima con sus respectivos menús e iconos.

El área de salida contiene una búsqueda similar a la que antes se apreciaba con información del programa

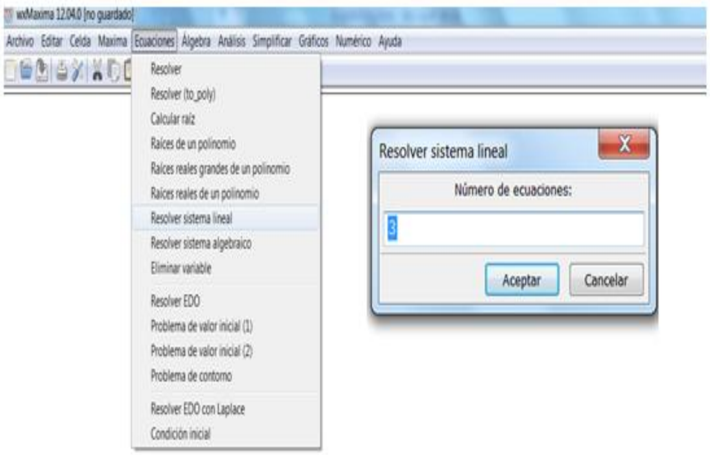
(%i1)

http://wxMaxima.sourcefog...aximarestarde

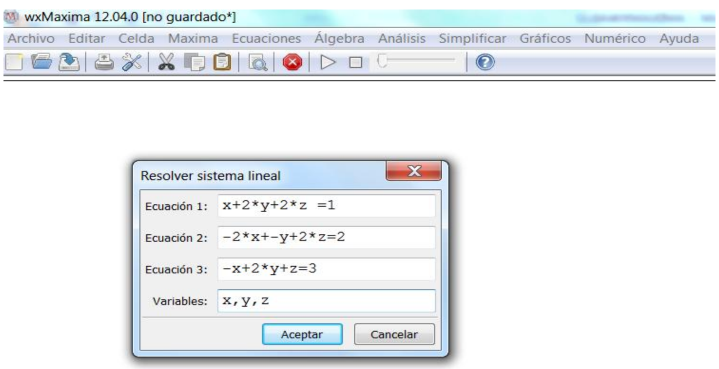
Exposición de los iconos del programa wxMaxima



1. Barra de menús: Nos permite acceder al motor de cálculo simbólico Máxima
2. Barra de iconos: Acceso rápido a algunas de las opciones de la barra de menús.
3. Área de salida o consola: En ella se muestran los resultados.
4. Área de entrada: Para teclear comandos
5. Área de botones o atajos: Otro punto de acceso rápido a los comandos de Máxima.
6. Área de entrada: iniciaremos comenzaremos realizando una ecuación con una incógnita.
7. En el área de la consola se muestra el resultado de la operación efectuada.
8. Cuadro de resolución del sistema algebraico.

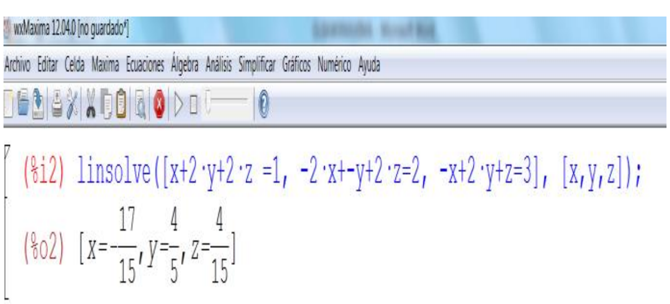


En el icono de ecuaciones se oprime click en resolver sistema lineal o también lo puede ejecutar en resolver sistema algebraico y allí aparece una pequeña ventana indicando el número de ecuaciones que usted desea trabajar. En este comando se trabaja el tema de los sistemas de ecuaciones lineales.

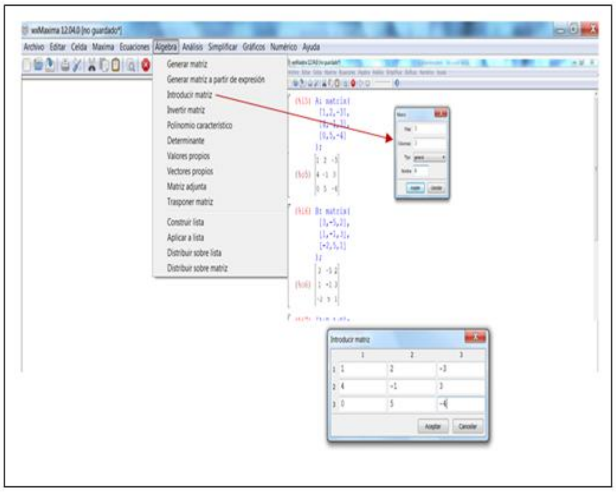


Después de dar click en Número de ecuaciones y oprimir aceptar aparece otra ventana en donde se debe complementar las ecuaciones. Ecuación 1: ecuación 2: y ecuación 3. Y luego se colocan las variables y aceptar.

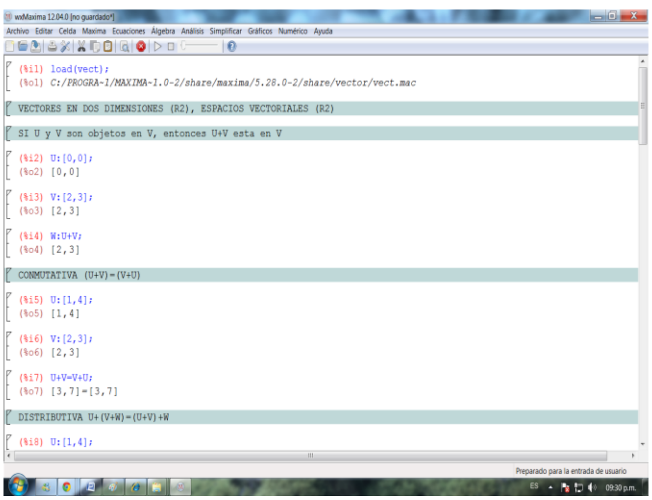
NOTA: para escribir la ecuación 2x+y-2z=1 en wxMaxima se debe anotar como 2*x+y-2*z=1, para que el programa lo



Como se puede observar el programa arroja el resultado de la ecuación fácilmente.



En el icono de Algebra aparece unos indicadores entre ellos tenemos introducir matriz al dar click, aparece unas ventanas en las que usted podrá completar la información que el soliciten. En esta parte se trabajará el tema de matrices.



Trabajo con el software wxMaxima en vectores $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

ANEXO 3

ESCUELA COLOMBIANA DE CARRERAS INDUSTRIALES
ECCI

ESPACIO VECTORIAL
TALLER N.1

Nombre: ____ **Carrera:** _______________________ **Fecha:** _____________________

Acción: *Durante este taller el estudiante tiene la oportunidad de interactuar, observar, analizar y reflexionar acerca del resultado de su propia acción para la construcción del conocimiento.*

Los ejercicios propuestos en el siguiente taller deben ser desarrollados tanto en los programas matemáticos wintplot y wxMáxima como en trabajo a mano para entregar.

A. Efectuar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con los programas de winplot y wxMaxima y encontrar el tipo de soluciones y sus puntos de corte si existen.

$I.\quad \begin{aligned} 2x - 2y &= 3 \\ 4x - 4y &= 6 \end{aligned}$

$II.\quad \begin{aligned} 2x - 4y &= 2 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$

III. $\begin{aligned} -6x + y &= 5 \\ -6x + 5y &= 4 \end{aligned}$

IV. $\begin{aligned} -x + y &= -5 \\ -x + y &= -3 \end{aligned}$

$V.\quad \begin{aligned} 2x - 2y + z &= 1 \\ x - 3y + 2z &= 3 \\ 3x + y - z &= -2 \end{aligned}$

$VI.\quad \begin{aligned} 3x + 2y - z &= 4 \\ -2x + y + 2z &= 3 \\ x - y + 3z &= 2 \end{aligned}$

ANEXO 4

ESCUELA COLOMBIANA DE CARRERAS INDUSTRIALES
ECCI

ESPACIO VECTORIAL
TALLER N.2

Nombre: ____________________________ **Carrera:** ____________________________ **Fecha:** ____________________

Acción: *Durante este taller el estudiante tiene la oportunidad de interactuar, observar, analizar y reflexionar acerca del resultado de su propia acción para la construcción del conocimiento.*

Los ejercicios propuestos en el siguiente taller deben ser desarrollados tanto en los programas matemáticos wintplot y wx-Máxima como en trabajo a mano para entregar.

I. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ $K = 3$. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $A + B$ $\quad$ $b)$ $B + A$ $\quad$ $c)$ $A.K$

II. Dados los vectores $\vec{u} = (2,3)$, $\vec{v} = (4,3)$ y $\alpha = 2$

efectuarlas siguientes operaciones a) $\vec{n} = \vec{u} + \vec{v}$, y

b) $\vec{m} = \vec{u}.\alpha$

$II \quad a.$ $\vec{u} = (1,3)$, $\vec{v} = (4,5)$ y $\alpha = -3$, a) $\vec{l} = \vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{p} = \alpha\,\vec{u}$

Según la definición de matrices de secciones $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, dos matrices de $2x2$ cualesquiera. Se tiene entonces que:

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Y sea c una constante, luego tenemos que la matriz $A.c$ seria de la siguiente forma:

B. Efectuar las siguientes matrices con el programa de wxMaxima de $2x2$ y $3x3$.

Sean las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Siendo k= 3 una constante.

Realizar: I. $A + B$ II. $K * C$ III. $(C + B) * A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ Siendo k= 2 efectuar: I. $A + B$ y II. $K * B$

Sea $\mathbb{D} = \{(x, y, 0): x, y, 0 \in \mathbb{R}\}$, se define la suma como: $(x, y, 0) + (x^{'}, y^{'}, 0) = (x + x^{'}, y + y^{'}, 0)$ y el producto: $k(x, y, 0) = (kx, ky, o)$

a) Determine si el conjunto es un espacio vectorial (V). En caso que no sea un (V). ¿Cuál axioma no se cumple?

b) Si $k(x, y, z)$= (0,0,0) , ¿Podemos decir que se cumple con la cerradura de la multiplicación por un escalar? y ¿por qué?

c) ¿Cuando no es un espacio vectoria

ANEXO 5

ESCUELA COLOMBIANA DE CARRERAS INDUSTRIALES
ECCI

ESPACIO VECTORIAL
TALLER N.3

Nombre: ________________________________ **Carrera:** ________________________ **Fecha:** _______________

Acción: *Durante este taller el estudiante tiene la oportunidad de interactuar, observar, analizar y reflexionar acerca del resultado de su propia acción para la construcción del conocimiento.*

Los ejercicios propuestos en el siguiente taller deben ser desarrollados tanto en los programas matemáticos winplot y wx-Máxima como en trabajo a mano para entregar.

1. Dados los vectores $\vec{v} = (2,3)$, $\vec{u} = (5,1)$, $\vec{w} = (4,-3)\ \epsilon\ R^2$ realice:

a) $\vec{m} = \vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{n} = \vec{v} + \vec{u}$

c) $\vec{t} = \vec{u} + (\overline{-u})$

d) $\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$

e) $\vec{a} = \vec{s} + \vec{w}$

f) $\vec{b} = \vec{w} + \vec{s}$

a) $c\ (\vec{u} + \vec{v})$

b) $c\ \vec{u} + c\vec{v}$

c) $(c + r)\vec{u}$

d) $c\ (\ r\vec{u})$

e) $r\ (c\vec{u})$

2. Dado el valor $c = 3\ \ y\, r = 2\ \ \varepsilon\ R$ realice:

Sea V el conjunto de funciones cuyo dominio está formado por los números reales. Sean f y g elementos cualesquiera de V. Se define la adición de $f + g$ como una función tal que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Esta expresión define a $f + g$ como una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Para determinar el valor de $f + g$ para cualquier número real x, se suma el valor de f en x y el valor de g en x. Esta operación recibe el nombre de adición de punto por punto.

La multiplicación por un escalar c de los elementos de V, cf, es la función

$$(cf)(x) = c[f(x)]$$

3. Sean las funciones $f(x) = 3x + 5,\ g(x) = 2x + 4,$ $h(x) = x - 2$

$\varepsilon\ F\ (conjunto\ de\ funciones)$, Realice:

a) $(f + g)(x) = 3x + 5 + 2x + 4 = 5x + 9$

b) $m(x) = (g + f)(x)$

c) $r(x) = \big(f + (-f)\big)(x)$

d) $j(x) = (f + h)(x)$

e) $k(x) = (j + h)(x)$

f) $l(x) = (h + j)(x)$

4. Dados valores $c = -2\ y\ r = 3\ \varepsilon\ R$ Realice:

a) $c\ (f + g)(x)$

b) $(cf(x)) + (cg(x))$

c) $(c + r)f(x)$

d) $c\ (rf(x))$

e) $r\ (cf(x))$

ANEXO 6

ESCUELA COLOMBIANA DE CARRERAS INDUSTRIALES
ECCI

ESPACIO VECTORIAL
TALLER N.4

Nombre: ______________________ **Carrera:** ______________________ **Fecha:** ______________________

Formulación: *En este taller radica el trabajo en equipo, donde la comunicación es verbal; en esta etapa los estudiantes tienen la posibilidad de debatir e intercambiar información con los demás compañeros del aula acerca de sus deducciones, es decir (interacción entre emisor y receptor); cada uno de ellos se verán forzados a justificar y formular sus ideales modificando el lenguaje e interactuando con el medio didáctico.*

Para el desarrollo del presente taller los estudiantes deben tener en cuenta lo desarrollado en los talleres anteriores y responder cada pregunta de acuerdo a ellos. Se realizan grupos de 5 personas, cada integrante del grupo debe tener una responsabilidad dentro del mismo, se debe interactuar con los programas de Winplot y ***wx-Máxima*** buscando enfatizar sobre los temas de clase con la ayuda de los mismos, además se debe preparar una exposición acerca de la sustentación de sus respuestas al grupo.

1. Sean las funciones $p(x) = 3x + 5$, $q(x) = x^2$, y $r(x) = 2x^3 \in P$, donde (conjunto de polinomios de grado igual o menor a 3), se define la suma usual de polinomios de la forma usual, es decir;

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$
$$r(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

Se define la suma usual de polinomios de la forma usual, es decir: $p(x) + q(x) = (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$.

Ejemplos: Si $p(x) = 3x + 5$, y $q(x) = x^2$, efectuamos la siguiente suma así: $p(x) + q(x) = x^2 + 3x + 5$. (Cerradura bajo la suma)

Ahora si tenemos $p(x) = 3x + 5$, $q(x) = x^2$, y $r(x) = 2x^3$ la suma seria así: $p(x) + q(x) + r(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 5$

Luego en los polinomios será que se cumple con: $a)$ ¿La ley asociativa de la suma? , $b)$ ¿La ley conmutativa? , $c)$ ¿El inverso aditivo? Y $d)$ ¿El polinomio neutro ó el polinomio cero? Verificar cada uno de ellos y ¿que concluye acerca ello?

2. La multiplicación por un escalar es la multiplicación de todo polinomio por una constante c, donde $c \in \mathbb{R}$, es decir;

$$cp(x) = c(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = ca_3x^3 + ca_2x^2 + ca_1x + ca_0$$

Ejemplo: Si $p(x) = 3x + 5$ y $c = 3$; luego obtenemos el siguiente resultado: $cp(x) = 3(3x + 5) = 9x + 15$. (Cerradura bajo la multiplicación por un escalar).

Tome uno de los polinomios del punto anterior y sean $c = 3 \ \ y \, r = 2 \ \in \mathbb{R}$,

a. $(cp)(x)$ ¿es un polimonio de grado igual o menor a 3?
b. En este polinomio su cumple con: La ley distributiva, La ley asociativa de la multiplicación por escalares, y con el elemento identidad multiplicativo
c. ¿Qué concluye?

3. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 1;\ g(x) = x + 5$

Realice:

a) $t(x) = (f + g)(x)$

b) $m(x) = (g + f)(x)$

c) $s(x) = \big(f + (-f)\big)(x)$

1) ¿Qué conclusión pueden obtener de estas operaciones?
2) Proponga cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ y realice la suma de las mismas.
3) ¿Se cumple la propiedad para toda función?

4. Dados los vectores $\vec{v} = (2{,}3)$, $\vec{u} = (5{,}1)$ $, \epsilon\ \mathbb{R}^2$ y los escalares $c = 3\ \ y\ r = 2\ \epsilon\ \mathbb{R}$ realice:

a) $\vec{m} = \vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{t} = \vec{u} + (\overrightarrow{-u})$

c) $(c + r)\vec{u}$

d) $c\ (r\vec{u})$

e) $r\ (c\vec{u})$

1) ¿Qué pasará con vectores en R^3 ?, ¿Será posible el desarrollar estas operaciones?
2) Proponga dos vectores en R^3 y realice de nuevo las propiedades.
3) De los resultados obtenidos observe si se cumple:

a) $c\ (r\vec{u}) = \ r\ (c\vec{u})$

b) $c\ (\vec{u} + \vec{v}) \ = \ c\,\vec{u} + c\vec{v}$

5. Sea $\mathbb{M}$ el conjunto de todas las matrices de 2×2 de números reales. Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ elementos de $\mathbb{M}$, se define las suma como:

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Tenemos que la multiplicación por un escalar , $\alpha\ \epsilon\ \mathbb{R}$, en una matriz 2×2 se define el producto como:

$$\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

La suma: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $A + B = \begin{pmatrix} 2+0 & -1+2 \\ 3+5 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

La multiplicación: $\alpha = -3 \in \mathbb{R}$, y la matriz A. Seria de la siguiente forma:

$$\alpha . A = -3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3).2 & (-3).-1 \\ (-3).3 & (-3).4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$$

Realizar e identificar a que axioma corresponde cada punto. Nota: $\alpha = -3$ y $\beta = 2$ $son\ constantes,\ \in \mathbb{R}$

- **a)** $A + (-A)$
- **b)** $A + B = B + A$
- **c)** $A + (B + S)$
- **d)** $(\alpha + \beta)A$
- **e)** $\alpha(\beta A)$
- **f)** $1. A$
- **g)** $A + 0 = A$
- **h)** β (A + B)

Sea la matriz $U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $V = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, verificar que la matriz de 2×3 , sea un espacio vectorial. En caso de que no sea un espacio vectorial en cual axioma no se cumpliría y ¿por qué?

ANEXO 7

ESCUELA COLOMBIANA DE CARRERAS INDUSTRIALES ECCI

PRUEBA DE SALIDA

NOMBRE: _________________________________ Fecha: _________ Carrera:________________________

De los puntos que se le presentan a continuación señale con una **x** la que usted considera que es la respuesta correcta.

1. Los elementos que componen un vector son:

a. Magnitud, orientación, forma.
b. Magnitud, Eje, flecha.
c. Magnitud, Dirección, Sentido.
d. Dirección, forma, magnitud.

2. Cuál de las siguientes ecuaciones no es una ecuación lineal.

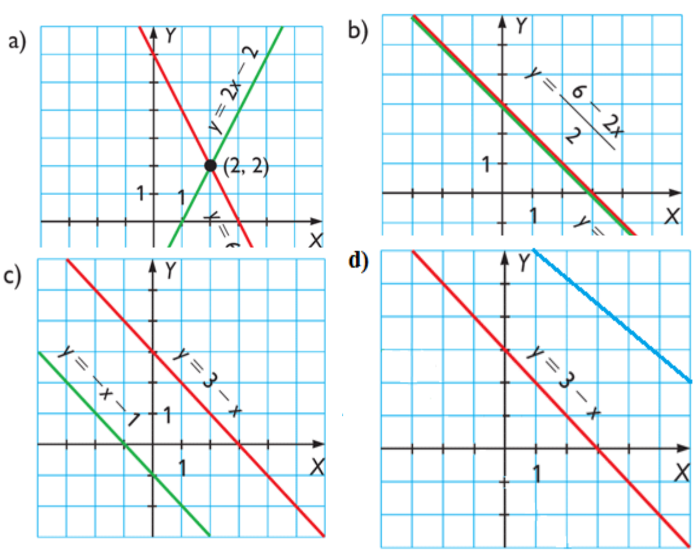
a. $x + 2y - 3z = 6$
b. $3x - 4y - 6 = 2x$
c. $2t - 3z = 7$
d. . $x^2 + 2z + t = 2$

3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones $5x + 2y = 1$ $\quad -3x - 3y = 5$

Se cumple que:

a. El sistema no tiene solución.
b. El sistema tiene infinita soluciones.
c. El sistema tiene solo una solución.
d. El sistema tiene dos soluciones.

4. De las siguientes graficas de sistemas de ecuaciones, la que representa una única solución es:



5. Dadas las matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

La matriz X que cumple que $A * X = B$ es:

a. $X = \begin{bmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$

b. $X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $X = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

d. $X = \begin{bmatrix} 0 & 17 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

6. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x - y + z = 3$$
$$2y - z = 1$$
$$-x + y = 1$$

Su solución es:

a. $x = -1,\ y = 3,\ z = 2$
b. $x = 1,\ y = 3,\ z = 2$
c. $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$
d. $x = -1,\ y = 2,\ z = 3$

7. Dados los vectores $\vec{v} = (2,3),\ \vec{u} = (5,1)$, $\vec{w} = (4,-3)$, al desarrollar.

$$\overrightarrow{(v + \vec{u})} + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$$

Encontramos que la propiedad que se cumple es:

a. Asociativa
b. Conmutativa
c. Elemento neutro
d. Clausurativa

8. Dado el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Su solución es:

a. 1
b. 2
c. 3
d. 6

9. Dada la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Su matriz opuesta es:

a. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ $b.$ $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

10. Sea $A \epsilon R^{m\times n}$ y $B \epsilon R^{n\times p}$ (número de columnas de A igual al número de filas de B), se define la matriz producto de A por B como la matriz $C \epsilon R^{m\times p}$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq p$$

Sea $D \epsilon R^{p\times q}$, una de las propiedades que no se cumple para este producto de matrices es:

a. $(AB)D = A(BD)$
b. $A(B + D) = AB + AD$
c. $AB = BA$

11. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz A^2 esta dada por:

a. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

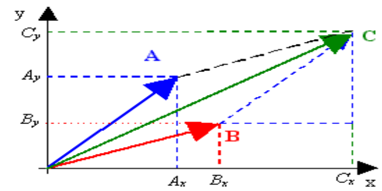
b. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$c.$ $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

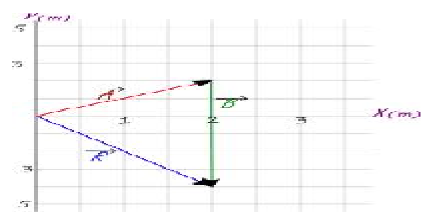
d. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. Dadas las siguiente graficas señale la que representa una suma de vectores:

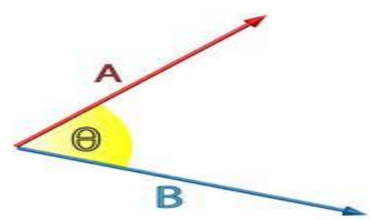
a.



b.



c.



13. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Su solución es:

a. $x_1 = 3$ $x_2 = 5$ $x_3 = 4$
b. $x_1 = 2$ $x_2 = -5$ $x_3 = 1$
c. $x_1 = 3$ $x_2 = 1$ $x_3 = 1$
d. $x_1 = 3$ $x_2 = 1$ $x_3 = 3$

14. Dada la curva de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(3,0), (2,3), (-1,1)$ los valores de a, b, c son:

a. $a = -\frac{11}{12},\ b = \frac{19}{12}\ ,\ c = \frac{7}{2}$
b. $a = -2,\ b = 3\ ,\ c = \frac{7}{2}$
c. $a = -\frac{11}{12},\ b = 5\ ,\ c = -1$
d. $a = 2,\ b = \frac{1}{3}\ ,\ c = \frac{4}{5}$

15. Una de las siguientes propiedades no es una propiedad del espacio vectorial.

a) $c\ (f(x)) + c(g(x))$= $c\ (f(x) + g(x))$

b) $(c + r)f(x)$ = $c\ (rf(x))$

c) $c\ (rf(x))$ = $r\ (cf(x))$

d) $c\ (\vec{u} + \vec{v})\ \ =\ \ c\ \vec{u} + c\vec{v}$